ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HÀ NỘI

Nguyễn Trung Tuân

Ngày 3 tháng 6 năm 2020

Tóm tắt nội dung

Trong tài liệu này tôi sẽ giới thiệu một số đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi toán lớp 12 của Hà Nội, đội tuyển này sẽ tham dự kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia cùng năm.

Mọi góp ý xin gửi về địa chỉ

Nguyễn Trung Tuân
THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam
Email: `tuan.nguyentrung@gmail.com`
Điện thoại: 0984995888

Mục lục

1 Năm học 2015-2016

Ngày 22 tháng 10 năm 2015

Bài 1 *(4,0 điểm).*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $\dfrac{x^2y + xy^2 + 8x}{xy^2 + 4y}$ là số nguyên.

Bài 2 *(4,0 điểm).*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ và

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh $u_{2017}\,(u_{2017} + 1)$ chia hết cho 2017.

Bài 3 *(3,0 điểm).*

Với $a, b, c \in [0; 2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{ab + a} + \sqrt{bc + b} + \sqrt{ca + c}.$$

Bài 4 *(5,0 điểm).*

Cho (ω) là đường tròn có tâm O và đường kính AB. Gọi C là một điểm trên (ω) sao cho $90^0 < \widehat{AOC} < 180^0$. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm K (khác O và C). Gọi (ω_1) là đường tròn tâm K bán kính KC. AD, AE là các tiếp tuyến của (ω_1) với D, E là các tiếp điểm. Chứng minh ba đường thẳng AC, BK và DE cùng đi qua một điểm.

Bài 5 *(4,0 điểm).*

Cho k là số nguyên dương. Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện: Tồn tại $2k + 1$ số nguyên dương phân biệt có tổng lớn hơn m và tổng của k số bất kì trong $2k + 1$ số đó không vượt quá $m/2$.

2 Năm học 2016-2017

Ngày 30 tháng 9 năm 2016

Bài 1 *(4,0 điểm).*
Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - x - 3y - 2 = 0 \\ x^3 - x^2y + xy^2 + y^2 + x - y = 0. \end{cases}$

Bài 2 *(4,0 điểm).*
Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn $12^x + y^4 = 56^z$.

Bài 3 *(4,0 điểm).*
Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 - f^2(y)) = xf(x) + y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 4 *(4,0 điểm).*
Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ với trung tuyến AM. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai D. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E, đường thẳng AC cắt đường thẳng BD tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE tại hai điểm A và P. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A, (S_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Q là giao điểm thứ hai của (S_1) và (S_2). Chứng minh tam giác OPQ là tam giác vuông.

Bài 5 *(4,0 điểm).*
Xét các cách viết các số $1^2, 2^2, \ldots, 8^2$ trên tám đỉnh của một hình lập phương, mỗi đỉnh viết một số và hai đỉnh khác nhau viết hai số khác nhau. Trong một cách viết, với mỗi cạnh của hình lập phương ta lập một số là tích hai số ở hai đầu mút của cạnh đó, gọi S là tổng của các số như vậy. Tìm giá trị lớn nhất của S.

3 Năm học 2017-2018

Ngày 30 tháng 9 năm 2017

Bài 1 *(4,0 điểm).*
Cho x, y và z là các số hữu tỷ sao cho $x^2 + y^2 + z, y^2 + z^2 + x$ và $z^2 + x^2 + y$ là các số nguyên. Chứng minh $2x$ là số nguyên.

Bài 2 *(4,0 điểm).*
Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\tan x) = \frac{1}{2}\sin 2\text{x} - \cos 2x,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)\ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Bài 3 *(4,0 điểm).*
Cho tam giác vuông ABC vuông tại A với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BA = BN$. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC tại hai điểm phân biệt A và P. Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với MP và đường thẳng AP, F là giao điểm của đường thẳng qua B song song với MP và đường thẳng PN. Chứng minh đường thẳng CP đi qua trung điểm của EF.

Bài 4 *(4,0 điểm).*
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho

$$(P(x))^2 = 2P(x^2 - 3) + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 5 *(4,0 điểm).*
Với $n \in \{1; 2; 3\}$, ta gọi một số tự nhiên k là số kiểu nnếu $k = 0$ hoặc k là một số hạng trong dãy $\{(n+2)^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ hoặc k là tổng của một số số hạng của dãy $\{(n+2)^m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Chứng minh rằng bất kỳ số nguyên dương nào cũng biểu diễn được ở dạng tổng của một số kiểu 1 với một số kiểu 2 và một số kiểu 3.

4 Năm học 2018-2019

Ngày 28 tháng 9 năm 2018

Bài 1 *(4 điểm).*
Gọi $d_1, d_2, \ldots, d_k$ là tất cả các ước dương của n được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $d_5 - d_3 = 40$ và $7d_5 + 8d_7 = 3n$.

Bài 2 *(4 điểm).*
Cho đa thức $P(x) = x^p + ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các số nguyên và p là số nguyên tố. Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ không chia hết cho p. Chứng minh rằng $abc + ac$ chia hết cho p^3.

Bài 3 *(4 điểm).*
Với mỗi số nguyên dương n, xét hàm số $f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x + 1$.

1. Chứng minh rằng với mỗi n, $f_n(x)$ luôn đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm x_n duy nhất.

2. Tìm $\lim f_n(x_n)$

Bài 4 *(4 điểm).*
Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Δ_1 cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D; Δ_2 cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại E và F (C, D, E, F khác A). Các đường trung trực của CD và EF cắt nhau tại K. Đường thẳng d thay đổi đi qua K cắt đường tròn (O') tại P, Q. Chứng minh rằng trực tâm tam giác APQ luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 5 *(4 điểm).*
Xét các số hữu tỉ dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn

$$x_1 + \frac{1}{p_1}; x_2 + \frac{1}{p_2}; \ldots; x_n + \frac{1}{p_n}$$

là các số nguyên dương, trong đó $p_i = \dfrac{x_1.x_2 \cdots x_n}{x_i}$, $\forall i \in \{1; 2; ...; n\}$.

1. Chứng minh rằng $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

2. Có bao nhiêu bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn đầu bài ?

5 Năm học 2019-2020

Ngày 22 tháng 10 năm 2019

Bài 1 *(4 điểm).*
Tìm tất cả các số tự nhiên m và n thỏa mãn $5^m = n.2^m + 1$.

Bài 2 *(4 điểm).*
Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2 \in (0;1)$ và

$$u_{n+2} = \frac{1}{n}u_{n+1}^2 + \frac{n-1}{n}\sqrt{u_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Tìm giới hạn của dãy (u_n).

Bài 3 *(4 điểm).*
Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$x^2y^2\left(f\left(x+y\right) - f\left(x\right) - f\left(y\right)\right) = 3\left(x+y\right)f\left(x\right)f\left(y\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Bài 4 *(5 điểm).*
Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi (O_a) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại D.

1. Chứng minh DI đi qua điểm chính giữa cung lớn BC.

2. Gọi (O_b) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh BC, BA và tiếp xúc trong với (O) tại E;(O_c) là đường tròn tiếp xúc với các cạnh CB, CA và tiếp xúc trong với (O) tại F. Chứng minh ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Bài 5 *(3 điểm).*
Gọi $S_n$là số cách chọn n tập con của [2019] thỏa mãn: mỗi tập con gồm n số tự nhiên liên tiếp, không tập con nào chứa 1010 và hai tập con bất kì không có phần tử chung. Chứng minh rằng $n!S_n < 2019^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.