

Thứ Ba, ngày 16 tháng Bảy năm 2019

**Bài 1.** Kí hiệu  $\mathbb{Z}$  là tập các số nguyên. Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  thỏa mãn

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

với mọi số nguyên  $a$  và  $b$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  và các điểm  $A_1, B_1$  tương ứng nằm trên các cạnh  $BC, AC$ . Các điểm  $P, Q$  tương ứng nằm trên các đoạn thẳng  $AA_1, BB_1$  sao cho  $PQ$  song song với  $AB$ . Điểm  $P_1$  nằm trên đường thẳng  $PB_1$  sao cho  $B_1$  nằm giữa  $P$  và  $P_1$ , và  $\angle PP_1C = \angle BAC$ . Tương tự, điểm  $Q_1$  nằm trên đường thẳng  $QA_1$  sao cho  $A_1$  nằm giữa  $Q$  và  $Q_1$ , và  $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ .

Chứng minh rằng các điểm  $P, Q, P_1$  và  $Q_1$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 3.** Một mạng xã hội có 2019 người dùng với một số cặp trong đó là bạn bè. Biết rằng nếu người dùng  $A$  là bạn với người dùng  $B$  thì người dùng  $B$  cũng là bạn với người dùng  $A$ . Những sự kiện như sau có thể lần lượt xảy ra:

Ba người dùng  $A, B, C$ , trong đó  $A$  là bạn với cả  $B$  và  $C$  nhưng  $B$  và  $C$  không phải là bạn của nhau, sẽ thay đổi trạng thái bạn bè của họ sao cho  $B$  và  $C$  trở thành bạn của nhau nhưng  $A$  không còn là bạn với  $B$  và cũng không còn là bạn với  $C$ . Các trạng thái bạn bè khác không thay đổi.

Ban đầu, có 1010 người dùng mà mỗi người có đúng 1009 người bạn và 1009 người dùng mà mỗi người có đúng 1010 người bạn. Chứng minh rằng có thể xảy ra một chuỗi các sự kiện như trên mà sau đó mỗi người dùng là bạn với không quá một người dùng khác.

*Thứ Tư, ngày 17 tháng Bảy năm 2019*

**Bài 4.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(k, n)$  sao cho

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

**Bài 5.** Ngân hàng thành phố Bath phát hành các đồng xu với một mặt được in chữ  $H$  và một mặt được in chữ  $T$ . Thầy Tụy có  $n$  đồng xu được xếp thành một hàng từ trái qua phải. Thầy Tụy thực hiện liên tiếp các bước biến đổi sau: nếu có đúng  $k > 0$  đồng xu với mặt ngửa là  $H$ , thầy sẽ lật đồng xu thứ  $k$  kể từ bên trái; nếu không, tất cả các đồng xu đều có mặt ngửa là  $T$  và thầy dừng lại. Ví dụ, nếu  $n = 3$  thì quá trình bắt đầu với cấu hình  $THT$  sẽ là  $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ , và do đó quá trình dừng lại sau ba bước.

- (a) Chứng minh rằng, với mỗi cấu hình ban đầu, quá trình sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước.
- (b) Với mỗi cấu hình  $C$  ban đầu của các đồng xu, gọi  $L(C)$  là số các bước biến đổi mà thầy Tụy thực hiện cho đến khi quá trình dừng lại. Ví dụ,  $L(THT) = 3$  và  $L(TTT) = 0$ . Hãy tính giá trị trung bình của  $L(C)$  trên tổng số  $2^n$  cấu hình ban đầu có thể của các đồng xu.

**Bài 6.** Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác nhọn  $ABC$  với  $AB \neq AC$ . Đường tròn nội tiếp  $\omega$  của tam giác  $ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC$ ,  $CA$  và  $AB$  tương ứng tại các điểm  $D$ ,  $E$  và  $F$ . Đường thẳng qua  $D$  vuông góc với  $EF$  cắt lại  $\omega$  tại  $R$ . Đường thẳng  $AR$  cắt lại  $\omega$  tại  $P$ . Đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $PCE$  cắt lại đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $PBF$  tại  $Q$ .

Chứng minh rằng các đường thẳng  $DI$  và  $PQ$  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua  $A$  và vuông góc với  $AI$ .