Đề chọn đội VMO 2018

Nguyễn Trung Tuân

Ngày 1 tháng 10 năm 2017

Tóm tắt nội dung

Tài liệu chứa các đề chọn đội VMO 2018 của các tỉnh.

Mục lục

1 Hà Nội **2**

2 Hà Tĩnh **3**

2.1 Ngày thứ nhất 3

2.2 Ngày thứ hai 4

3 Đoạn cuối **5**

1 Hà Nội

Bài 1. Cho x, y và z là các số hữu tỷ sao cho các số $x^2 + y^2 + z$, $y^2 + z^2 + x$ và $z^2 + x^2 + y$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $2x$ là số nguyên.

Bài 2. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\tan x) = \frac{1}{2}\sin 2\,x\, - \cos 2x\,,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)\ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Bài 3. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BA = BN$. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC tại hai điểm phân biệt A và P. Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với MP và đường thẳng AP, F là giao điểm của đường thẳng qua B song song với MP và đường thẳng PN. Chứng minh đường thẳng CP đi qua trung điểm của EF.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho

$$(P(x))^2 = 2P(x^2 - 3) + 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 5. Với $n \in \{1; 2; 3\}$, ta gọi một số tự nhiên k là số kiểu n nếu $k = 0$ hoặc k là một số hạng của dãy $1\,;\ n+2\,;\ (n+2)^2;\ (n+2)^3; ...$ hoặc k là tổng của một số số hạng của dãy trên. Chứng minh rằng bất kỳ số nguyên dương nào cũng biểu diễn được dưới dạng tổng của một số kiểu 1 với một số kiểu 2 và một số kiểu 3.

2 Hà Tĩnh

2.1 Ngày thứ nhất

Bài 1. Cho số thực a và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2017}{2018}\ln(2x_n^2 + 15) - 9 \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh (x_n) hội tụ.

Bài 2. Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 3.$$

Chứng minh rằng $(a + b + c)(a + b + c - abc) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC với đường tròn ngoại tiếp (O), đường tròn nội tiếp (I). Các điểm D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CA. Các điểm H, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của D, E, F lên EF, FD, DE. Gọi S là giao điểm của EF và ZT.
(a) Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ASI.
(b) Gọi M là giao điểm thứ hai của AI và (O). Đường tròn tâm M qua E, F và cắt (O) tại X, Y. Chứng minh rằng S, X, Y, Z, T thẳng hàng.

Bài 4. Một lớp chuyên Toán có 35 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm muốn tổ chức cho lớp một chương trình trải nghiệm gồm bốn chuyến đi với yêu cầu phải thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:
(i) Mỗi học sinh trong lớp phải tham gia ít nhất một chuyến đi;
(ii) Với mỗi $k \in \{2; 3; 4\}$ thì chuyến đi thứ k phải có ít nhất một học sinh đã tham gia chuyến đi thứ $k - 1$ cùng đi.
Tính số cách để thầy giáo thực hiện chương trình trải nghiệm đó.

2.2 Ngày thứ hai

Bài 1. Cho hai đa thức bậc ba

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 16, \qquad Q(x) = x^3 + 3x^2 + 8x - 4.$$

(a) Chứng minh rằng mỗi đa thức đều có một nghiệm dương duy nhất;
(b) Gọi các nghiệm dương của $P(x), Q(x)$ lần lượt là p, q. Chứng minh rằng $\sqrt{p} - \sqrt{q} = 1$.

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho với mọi số nguyên dương n, ta có n chia hết $a^n + b^{n+1}$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) có dây BC không phải đường kính và một điểm A di động trên đường tròn sao cho ABC là tam giác nhọn. Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt phân giác trong AD của tam giác ABC tại điểm thứ hai I. Chứng minh HI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho số nguyên n thỏa mãn $n > 2$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập $A, B \subset \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện
(1) $|A| = |B| = n$ và $A \cap B = \emptyset$;
(2) $\sum\limits_{a \in A} a = \sum\limits_{b \in B} b$ và $\sum\limits_{a \in A} a^2 = \sum\limits_{b \in B} b^2$.

3 Đoạn cuối

- Tôi cảm ơn các thầy cô và các bạn đồng nghiệp rất nhiều, không có mọi người tôi không thể hoàn thành tài liệu này;
- Các đề ở đây không phải đề chính thức, chúng đều được tôi gõ lại bằng LaTeX . Nếu có chỗ nào sai thì do lỗi của tôi;
- Tuyển tập này cũng được đăng ở https://nttuan.org/2017/09/30/vmotst2018/

Nguyễn Trung Tuân
Email: tuan.nguyentrung@gmail.com
Web: http://nttuan.org/
Facebook: https://www.facebook.com/nttuan0136