

T-Math 6

Bài luyện cho các học sinh

Bài 1. Cho x và y là các số thực dương sao cho $x + y^{2016} \geq 1$. Chứng minh rằng

$$x^{2016} + y > 1 - \frac{1}{100}.$$

Bài 2. Cho lục giác lồi $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ nội tiếp đường tròn Ω bán kính R . Các đường chéo A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 đồng quy tại X . Với mỗi $i = 1, 2, 3$ gọi ω_i là đường tròn tiếp xúc với các đoạn XA_i, XB_i và cung A_iB_i của Ω không chứa các đỉnh khác của lục giác; gọi r_i là bán kính của ω_i .

(a) Chứng minh $R \geq r_1 + r_2 + r_3$;

(b) Nếu $R = r_1 + r_2 + r_3$, chứng minh sáu tiếp điểm của ω_i với các đường chéo A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 là đồng viên.

Bài 3. Cho một tập n điểm trong không gian sao cho không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chia tập này thành hai tập con \mathcal{A}, \mathcal{B} . \mathcal{AB} -cây là một hình gồm $n - 1$ đoạn thẳng, mỗi đoạn có một đầu trong \mathcal{A} và đầu kia trong \mathcal{B} , và không có các đoạn tạo thành một đường gấp khúc khép kín. Một \mathcal{AB} -cây có thể chuyển thành một \mathcal{AB} -cây khác theo phép biến đổi sau: Chọn ba đoạn A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2 trong \mathcal{AB} -cây đầu tiên sao cho $A_i \in \mathcal{A}$ và $A_1B_1 + A_2B_2 > A_1B_2 + A_2B_1$, sau đó thay A_1B_1 bởi A_1B_2 . Cho một \mathcal{AB} -cây bất kỳ, chứng minh rằng mỗi dãy các phép biến đổi liên tiếp trên nó đều dừng tại cùng một kết quả sau hữu hạn bước.

Nguồn: Romanian Master of Mathematics 2016, Day 2