

OLYMPIC DUYÊN HẢI BẮC BỘ 2011

Môn: Toán 10, Ngày thi: 23 tháng 04 năm 2011

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. Giải phương trình sau trên \mathbb{R}

$$4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1).$$

Bài 2. Cho bốn số thực dương a, b, c và d thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)bc} + \frac{1}{(b+1)cd} + \frac{1}{(c+1)da} + \frac{1}{(d+1)ab} \geq 2.$$

Bài 3. Trên hai cạnh BC và AB của tam giác nhọn ABC lần lượt lấy các điểm A_1 và C_1 khác các đỉnh của tam giác ABC . Các đoạn thẳng AA_1 và CC_1 cắt nhau tại K . Gọi P là giao điểm khác B của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BAA_1 và BCC_1 . Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác AKC khi và chỉ khi P là trực tâm của tam giác ABC .

Bài 4. Với mọi số nguyên dương n , hãy xác định theo n số tất cả các cặp thứ tự hai số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 - y^2 = 100 \cdot 30^{2n}$. Đồng thời, chứng minh số các cặp này không thể là số chính phương.

Bài 5. Cho số tự nhiên $n \geq 3$ và tập hợp với $X \subset \{1, 2, \dots, n^3\}$ và có $3n^2$ phần tử. Chứng minh rằng tồn tại 9 phần tử a_1, a_2, \dots, a_9 đôi một khác nhau của X sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ a_4x + a_5y + a_6z = 0 \\ a_7x + a_8y + a_9z = 0. \end{cases}$$

có nghiệm nguyên không tầm thường.

Đề thi này được gõ lại bằng L^AT_EX bởi

Nguyễn Trung Tuân

THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh

Email: tuan.nguyentrung@gmail.com

Điện thoại: 0984995888

Blog: <http://trungtuan.wordpress.com/>

Website: <http://mathscope.org/>