ShaMO 20

Được soạn bởi Nguyễn Trung Tuân

Bài 1. Một số nguyên dương n được gọi là *tốt* nếu có các số nguyên dương $a < b < c$ sao cho $a|b, b|c$ và $n = a + b + c$.
a) Chứng minh rằng hầu hết các số nguyên dương là tốt, nghĩa là chỉ có hữu hạn các số nguyên dương không tốt;
b) Tính tổng tất cả các số không tốt.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Biết rằng có các điểm D, E, F trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BD = CE = AF$ và $\widehat{BDF} = \widehat{CED} = \widehat{AFE}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 3. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 5$ và

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{2010} + 3x_n + 16}{x_n^{2009} - x_n + 11} \ \forall n \geq 1.$$

Tìm $\lim y_n$ với $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^{2009} + 7},\ n = 1, 2, \cdots$.

Bài 4. Cho tam giác ABC.
a) Nếu $6S = 2a^2 + bc$, tính các góc của tam giác;
b) Chứng minh rằng $3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Bài 5. Cho n, k là các số nguyên dương thoả mãn $n \geq k + 3$. Chứng minh rằng các số $C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}$ không thể lập thành một cấp số cộng theo thứ tự đó.

Bài 6. Hai đường tròn C_1, C_2 cắt nhau tại A, B. CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ($C \in C_1, D \in C_2$) với B gần CD hơn A. CB cắt AD tại E, DB cắt CA tại F, EF cắt AB tại N. K là hình chiếu vuông góc của N trên CD.
a) Chứng minh $\widehat{CAB} = \widehat{DAK}$;
b) Gọi O là tâm của (ACD) và H là trực tâm của ΔKEF. Chứng minh rằng O, B và H thẳng hàng.

Chú ý.
1/ Vì vài lý do nên tôi không nêu rõ nguồn của các bài toán, mong các tác giả thông cảm
2/ 10 Toán@: Nếu em nào làm được ít nhất 4 bài sẽ có thưởng (sách, vở, bút,...)