Chương 2

Đáp án tuyển sinh

2.1 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1989 (cho mọi thí sinh)

Bài 1. Gọi tập hợp các số chính phương là ϵ. $P(x) = ax^2 + bx + c$ Ta có

$$P(0) = c \in \epsilon \to c = c_1^2, \quad c_1 \in \mathbb{Z}$$
$$P(1) = a + b + c \in \epsilon$$
$$P(-1) = a - b + c \in \epsilon \to \begin{cases} a + b \in \mathbb{Z} \\ a - b \in \mathbb{Z} \end{cases} \to \begin{cases} 2a = a_1 \in \mathbb{Z} \\ 2a = b_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$P(4) = 16a + 4b + c_1^2 = k^2, k \in \mathbb{Z} \to 8a_1 + 2b_1 = k^2 - c_1^2$$

Do $8a_1 + 2b_1$ chẵn nên $k^2 - c_1^2$ chẵn hay k và c_1 cùng tính chẵn, lẻ nên

$$k^2 - c_1^2 \vdots 4 \to b_1 \vdots 2 \to b = \frac{b_1}{2} \in \mathbb{Z}$$

Do $a - b \in \mathbb{Z}$ nên từ đây ta có $a \in \mathbb{Z}$

$P(2) = 4a + 2b + c_1^2 = t^2, \quad t \in \mathbb{Z} \to 4a + 2b = t^2 - c_1^2 \to t^2 - c_1^2$ là chẵn suy ra t và c_1 cùng tính chẵn, lẻ nên ta có $t^2 - c_1^2 \vdots 4 \to b$ là chẵn

Vậy $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và b chẵn.

Bài 2. Đặt

$$\begin{aligned} P &= a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 1989 \\ \to 4P &= a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) + 4.1989 - 12 \\ &= (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 + 4.1986 \geq 4.1986 \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 1986$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b - 2 = 0 \end{cases} \to a = b = 1$$

Vậy P đạt giá trị bé nhất bằng 1986, đạt được khi $a = b = 1$

Bài 3. Gọi 52 số nguyên dương bất kỳ đã cho là $a_1, a_2, \ldots, a_{52}$. Mỗi số a_i đều có dạng $a_i = 100b_i + c_i$, trong đó $b_i, c_i \in \mathbb{N}$ và $0 \le c_i \le 99$, $(i = \overline{1, 52})$.

Nếu trong số $c_1, c_2, \ldots, c_{52}$ có hai số bằng nhau, giả sử $c_i = c_k \to a_i - a_k = 100(b_i - b_k) \vdots 100$.

Nếu tất cả $c_1, c_2, \ldots, c_{52}$ đôi một khác nhau thì có ít nhất 51 số khác 50, giả sử đó là $c_1, c_2, \ldots, c_{51}$. Khi đó ta đặt $d_i = 100 - c_i$ thì $d_1, d_2, \ldots, d_{51}$ là các số nguyên khác nhau và $1 \le d_i \le 100$. Như vậy 102 số $c_1, c_2, \ldots, c_{52}$, $d_1, d_2, \ldots, d_{51}$ chỉ nhận không quá 101 giá trị (từ 0 đến 100) và do đó có 2 số trong chúng bằng nhau. Do các số $c_1, c_2, \ldots, c_{51}$ khác nhau và $d_1, d_2, \ldots, d_{51}$ khác nhau nên hai số bằng nhau là c_i và d_k nào đó suy ra $c_i = d_k = 100 - c_k \to c_i + c_k = 100$, ở đây $i \ne k$ vì $c_i \ne 50 \to a_i + a_k = 100(b_i + b_k) + 100 \vdots 100$.

Bài 4 Kéo dài BE, CF các đoạn $EI = BE$ và $FK = CF$. Khi đó $\triangle ABI, \triangle ACK$ cân ở A và $\widehat{BAK} = \widehat{CAK} = 30°$.

1. Nếu $\widehat{BAC} = 150°$ thì B, A, K thẳng hàng, C, A, K thẳng hàng và $BK = BA = AK = IA + AC = IC$.

   Do E, M, F là các trung điểm của IB, BC, CK nên $EM = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2}BK = MF \Rightarrow \triangle MEF$ cân ở M

2. Gọi giao điểm của IC và BK là O thì trong mọi trường hợp ta đều có A, B, O, I cùng nằm trên một đường tròn và góc giữa hai tia BK, CI bằng 150°. Từ đó ta có $\widehat{MEF} = \widehat{MFE} = 15°$.

Bài 5. Giả sử theo thứ tự 9 bạn học sinh là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$. Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng.

Giả sử ngược lại: Không có bạn nào đứng cách đều hai bạn cùng lớp (1).

Không mất tổng quát giả sử a_5 là học sinh lớp A, khi đó a_4 và a_6 không thể cùng thuộc lớp A. Vì vậy có hai khả năng sau:

1. a_4 và a_6 cùng thuộc lớp B. Khi đó do a_4 cách đều a_2 và a_6, còn a_6 cách đều a_4 và a_8 nên a_2 và a_8 thuộc lớp A suy ra a_5 đứng cách đều hai bạn cùng lớp là a_2 và a_8, trái với giả thiết (1).

2. a_4 và a_6 thuộc hai lớp khác nhau, không mất tổng quát giả sử a_4 thuộc lớp A còn a_6 thuộc lớp B. Do a_4 cách đều a_3 và a_5, nên a_3 thuộc lớp B. Do a_6 cách đều a_3 và a_9 nên a_9 thuộc lớp A. Do a_5 cách đều a_1 và a_9 nên a_1 thuộc lớp B. Do a_2 cách đều a_1, a_3 nên a_2 thuộc lớp A. Do a_5 cách đều a_2, a_8 nên a_8 thuộc lớp B. Do a_6, a_8 thuộc lớp B nên a_7 thuộc lớp A. Như vậy a_7 đứng cách đều hai bạn cùng lớp A là a_5 và a_9, trái với giả thiết (1).

   Vậy cả hai khả năng a) và b) đều dẫn đến vô lý nên điều giả sử (1) là sai.

2.2 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1989 (cho thí sinh chuyên lý)

Bài 1.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 36}{2x + 3} = -x + 2 + \frac{30}{2x + 3}$$

Với x nguyên $f(x)$ là số nguyên khi và chỉ khi $2x + 3$ là ước số của 30. Do $2x + 3$ là lẻ nên $2x + 3$ chỉ có thể nhận một trong tám giá trị là $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$, từ đó thu được 8 giá trị cần tìm của x là $-9, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 6$.

Bài 2. Đặt $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$ ta có

$$\begin{aligned} 4P &= a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) \\ &= (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 0$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

Vậy P đạt giá trị bé nhất bằng 0, đạt được khi và chỉ khi $a = b = 1$

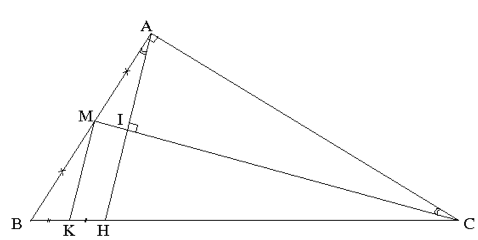
Bài 3

1. Với m nguyên dương ta có $m^2 < m^2 + m + 1 < (m + 1)^2$. Do đó $m < \sqrt{m^2 + m + 1} < m + 1 \rightarrow \sqrt{m^2 + m + 1}$ không là số nguyên hay $m^2 + m + 1$ không là số chính phương.

2. Giả sử ngược lại: $m(m + 1)$ bằng tích của 4 số nguyên liên tiếp, tức là tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ mà $m(m + 1) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3) = (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) = n(n + 2)$, với $n = a^2 + 3a \in \mathbb{Z}$.

   Vậy $m(m + 1) = n(n + 2)$ suy ra $m^2 + m + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ hay $m^2 + m + 1$ là số chính phương, trái với kết luận câu 1) nên điều giả sử $m(m + 1)$ bằng tích của 4 số nguyên liên tiếp là sai.

Bài 4.



Giả sử AH cắt MC ở I. Gọi trung điểm của BH là K thì $MK//AM$. Dễ thấy ba tam giác vuông AMC, IAC và IMA đồng dạng mà $AC = 2AM$ nên $IC = 2IA = 4IM$ suy ra

$$\frac{MK}{MC} = \frac{IM}{IC} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{2HK}{HC} = \frac{1}{2}$$

Vậy

$$\frac{BH}{HC} = \frac{1}{2}$$

Bài 5. Gọi 6 thành phố đã cho là A, B, C, D, E, F.

Xét thành phố A. Trong 5 thành phố còn lại thì có ít nhất 3 thành phố liên lạc được với A hoặc có ít nhất ba thành phố không liên lạc được với A (vì nếu số thành phố liên lạc được với A không vượt quá 2 và số thành phố không liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 thì ngoài A, số thành phố còn lại không vượt quá 4). Ta xét cả hai khả năng.

a) Số thành phố liên lạc được với A không ít hơn 3, giả sử B, C, D liên lạc được với A. Theo giả thiết, trong 3 thành phố B, C, D có hai thành phố liên lạc được với nhau, khi đó hai thành phố này cùng với A là ba thành phố (đôi một) liên lạc được với nhau.

b) Số thành phố không liên lạc được với A không ít hơn 3, giả sử ba thành phố không liên lạc được với A là D, E, F. Khi đó trong bộ ba thành phố (A, D, E) thì D và E liên lạc được với nhau (vì D, E không liên lạc được với A).

Tương tự, trong các bộ ba $(A, E, F), (A, F, D)$ thì E và F liên lạc được với nhau, F và D liên lạc được với nhau và như vậy D, E, F là ba thành phố (đôi một) liên lạc được với nhau.

2.3 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1989 (cho thí sinh chuyên toán - tin học)

Bài 1.

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = \\ &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) \end{aligned}$$

Bài 2.

1.

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x^2+x+1} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} = -\frac{3}{2}\\
\Rightarrow & x + \frac{1}{x} + 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}\\
\Rightarrow & \frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}
\end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{4}{21}$$

Chú ý: Có thể giải phương trình $\frac{x}{x^2+x+1} = -\frac{2}{3}$, thu được hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = \frac{1}{2}$. Từ đó ta có: $\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{4}{21}$.

2.

$$P(x) = \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$$

Ta có $P(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$ và $P(0) = 0$.

Với $x \neq 0$ ta có $\frac{1}{P(x)} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 3 \quad (\text{vì} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2)$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$. Vậy $P(x) \leq \frac{1}{3}$ hay $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

Bài 3.

$$P(n) = a^n + bn + c \Rightarrow \begin{cases} P(1) = a + b + c \\ P(2) = a^2 + 2b + c \\ P(3) = a^3 + 3b + c \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
P(2) - P(1) \,\vdots\, m \Leftrightarrow\ & a(a-1) + b \,\vdots\, m\\
\rightarrow\ & 2ba(a-1) + 2b^2 \,\vdots\, m \qquad (1)
\end{aligned}$$

và

$$[a(a-1)+b]^2 \,\vdots\, m \Leftrightarrow a^2(a-1)^2 + 2ba(a-1) + b^2 \,\vdots\, m \qquad (2)$$

$$P(1) + P(3) - 2P(2) \,\vdots\, m \Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + a \,\vdots\, m \Rightarrow a(a-1)^2 \,\vdots\, m \Rightarrow a^2(a-1)^2 \,\vdots\, m$$

Do đó, từ (2) ta có

$$2ba(a-1)+b^2 \vdots m \tag{3}$$

Từ (1) và (3) ta suy ra $b^2 \vdots m$.

Có thể thấy rằng từ giả thiết của bài toán không suy ra được $b \vdots m$. Thật vậy, với $a=3, b=2, c=3$ thì $P(n)=3^n+2n+3$. Chọn $m=4$ khi đó:

Với n lẻ thì dễ thấy $3^n+1 \vdots 4$, do đó $P(n)=3^n+1+2(n+1) \vdots 4$

Với n chẵn thì dễ thấy $3^n+3 \vdots 4$, do đó $P(n)=3^n+3+2n \vdots 4$

Vậy với mọi số nguyên dương n ta có $P(n) \vdots 4$, nhưng $b=2$ không chia hết cho 4.

Bài 4. Gọi trung điểm của CF là O thì $MIOH$ và $KLON$ là các hình bình hành. Suy ra hai đoạn MO, IH có chung trung điểm P và hai đoạn KO, LN có chung trung điểm Q. Có hai khả năng:

1. M, O, K không thẳng hàng. Khi đó MQ là đường trung tuyến chung của $\triangle MLN$ và $\triangle MOK$. Do vậy trọng tâm G của $\triangle MLN$ cũng là trọng tâm $\triangle MOK$. Tương tự, KP là đường trung tuyến chung của $\triangle MOK$ và $\triangle IKH$ nên trọng tâm G của $\triangle MOK$ cũng là trọng tâm $\triangle IKH$. Vậy trọng tâm hai tam giác MLN và IKH trùng nhau.

2. M, O, K thẳng hàng. Gọi G và G' là trọng tâm $\triangle MLN$ và $\triangle IKH$ tương ứng. Đặt $MP=PO=a, OQ=QK=b$.

   Khi đó

$$MG=\frac{2}{3}MQ=\frac{2}{3}(2a+b)=\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b$$
$$KG'=\frac{2}{3}KP=\frac{2}{3}(2b+a)=\frac{4}{3}b+\frac{2}{3}a$$

$$\Rightarrow MG'=MK-KG'=2a+2b-\left(\frac{4}{3}b+\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=MG$$

   Do G, G' cùng thuộc đoạn MK nên từ đây ta có $G'\equiv G$

Bài 5. Gọi tổng số học sinh là T thì $T=a_1+a_3+\cdots+a_n$. Gọi số lớp có đúng i học sinh là $p_i \quad (i=\overline{1,M})$.

1. Dễ thấy $T=1p_1+2p_2+3p_3+\cdots+Mp_M$. Mặt khác do d_k là số lớp

mà trong mỗi lớp đó có số học sinh không ít hơn k nên

$$\begin{aligned}
d_1 &= p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{M-1} + p_M && (1)\\
d_2 &= \quad\ \ p_2 + p_3 + \cdots + p_{M-1} + p_M && (2)\\
d_3 &= \qquad\quad p_3 + \cdots + p_{M-1} + p_M && (3)\\
&\cdots\cdots\\
d_{M-1} &= \qquad\qquad\qquad p_{M-1} + p_M && \text{(M-1)}\\
d_M &= \qquad\qquad\qquad\quad p_M && \text{(M)}
\end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên lại ta được

$$d_1+d_2+\cdots+d_M = 1p_1+2p_2+3p_3+\cdots+Mp_M = T = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

2. Ta có $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = p_1 1^2 + p_2 2^2 + \cdots + p_M M^2$. Mặt khác, nhân các đẳng thức $(1), (2), (3), \ldots, (M)$ ở câu 1) với $1, 3, 5, \ldots, (2M-1)$ tương ứng rồi cộng lại ta được

$$\begin{aligned}
d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \cdots + (2M-1)d_M &=\\
&= p_1 + (1+3)p_2 + (1+3+5)p_3 + \cdots +\\
&\qquad + (1+3+5+\cdots+(2M-1))p_M\\
&= 1^2P_1 + 2^2p_2 + 3^3p_3 + \cdots + M^2p_M = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2
\end{aligned}$$

(Chú ý rằng $1 + 3 + 5 + (2k-1) = k^2$)

2.4 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1991 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1.
$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \sqrt{b} \qquad (1)$$

Để các căn có nghĩa ta phải có $-a \le x \le a$. Do vế phải dương nên $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} > 0$ suy ra $x > 0$.

Vậy điều kiện đối với x là: $0 < x \le a$. Với điều kiện đó (1) tương đương với

$$\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2a-2\sqrt{a^2-x^2}} = b \Rightarrow \frac{2a}{1-\sqrt{a^2-x^2}} - 1 = b$$

$$\frac{2a}{b+1} = a - \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a(b-1)}{b+1} \qquad (2)$$

Do đó

Nếu $b < 1$ thì (2) vô nghiệm do đó (1) vô nghiệm

Nều $b \geq 1$ thì (2) tương đương với

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2(b-1)^2}{(b+1)^2} \Rightarrow x^2 = a^2\frac{4b}{(b+1)^2} \Rightarrow x = \pm\frac{2a}{b+1}\sqrt{b}$$

Loại nghiệm âm ta được nghiệm $x = \frac{2a}{b+1}\sqrt{b}$ thoả mãn điều kiện $0 < x \leq a$ (vì $b + 1 \geq 2\sqrt{b}$).

Vậy (1) có nghiệm khi và chỉ khi $b \geq 1$ và nghiệm đó là $x = \frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$

2.

$$x^2 + ax + b + 1 = 0 \tag{1}$$

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của (1). Do $b \neq -1$ nên $x_1 \neq 0$ và $x_2 \neq 0$. Theo định lý Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a^2 + b^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 \\ &= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \end{aligned}$$

Do x_1, x_2 là các số nguyên khác 0 nên x_1^2+1 và x_2^2+1 là các số nguyên không bé hơn 2 và như vậy $a^2 + b^2$ là hợp số.

Bài 2.

$$\begin{cases} a^3x + a^2y + az = 1 \\ b^3x + b^2y + bz = 1 \\ c^3x + c^2y + cz = 1 \end{cases}$$

Nhân (1) với b và (2) với a rồi trừ từng vế cho nhau, sau đó chia cho $a - b \neq 0$ ta được phương trình

$$ab(a + b)x + aby = -1 \tag{4}$$

Tương tự, nhân (1) với c và (3) với a rồi trừ từng vế cho nhau, sau đó chia cho $a - c \neq 0$ ta được

$$ac(a + c)x + acy = -1 \tag{5}$$

Khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} a^3x + a^2y + az = 1 \\ ab(a+b)x + aby = -1 \\ ac(a+c)x + acy = -1 \end{cases}$$

Nhân (4) với c, (5) với b rồi trừ từng vế cho nhau, sau đó chia cho $b - c \neq 0$ ta được $abcx = 1$ hay $x = \frac{1}{abc}$. Thay $x = \frac{1}{abc}$ vào (4) thu được $y = -\frac{a+b+c}{abc}$. Thay $x = \frac{1}{abc}, y = -\frac{a+b+c}{abc}$ vào (1) thu được $z = \frac{ab+bc+ca}{abc}$. Vậy nghiệm của hệ đã cho là

$$x = \frac{1}{abc}, \quad y = -\frac{a+b+c}{abc}, \quad z = \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

Bài 3 Dễ thấy 7^x chia 4 dư 3 nếu x lẻ và dư 1 nếu x chẵn. Phương trình đã cho tương đương với

$$7^x - 1 = 3.2^y \tag{1}$$

Nếu x lẻ thì $7^x - 1$ chia 4 dư 2 còn với $y \geq 2$ thì $3.2^y \vdots 4$ do đó y chỉ có thể là 1. Với $y = 1$ ta được nghiệm là $x = 1, y = 1$.

Nếu x chẵn tức là $x = 2z$ (z nguyên dương) phương trình (1) có dạng

$$(7^z + 1)(7^z - 1) = 3.2^y \tag{2}$$

Vì 2,3 là các số nguyên tố, nên (2) là dạng phân tích của $(7^z + 1)(7^z - 1)$ thành tích các thừa số nguyên tố.

Do $7^z + 1$ chia 3 dư 2 nên $7^z + 1 = 2^n$.(3) với n là số nguyên dương nào đó. Từ đó ta có $7^z - 1 = 2^n - 2$ suy ra (2) có dạng

$$2^n(2^n - 2) = 3.2^y \Rightarrow 2^{n+1}(2^{n-1} - 1) = 3.2^y$$

Do đó $2^{n-1} - 1$ không chia hết cho 2 nên $2^{n-1} - 1 = 3$ hay $n = 3$. Thay vào (3) ta thu được $z = 1$ suy ra $x = 2$. Thay $x = 2$ vào (1) ta được nghiệm là $x = 2, y = 4$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là $x = 1, y = 1$ và $x = 2, y = 4$

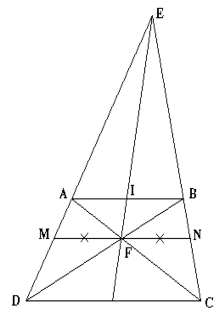
Bài 4.

1. Gọi các giao điểm của EF với AB, CD tương ứng là I, K. Qua F kẻ đường thẳng song song với AB và CD cắt AD ở M, cắt BC ở N.

   Ta có
   $$\frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{FN}{DC} \Rightarrow MF = FN$$

Do $AB//MN, CD//MN$ nên ba đường thẳng đồng quy EC, ED, EK cắt các đường thẳng AB, MN, DC thành các đoạn thẳng tỷ lệ

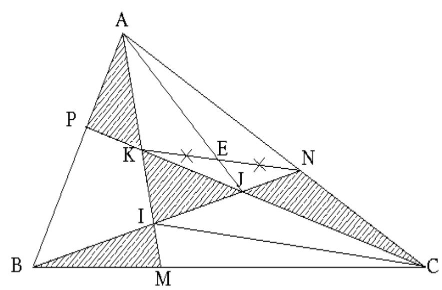
$$\frac{IA}{IB} = \frac{KD}{KC} = \frac{FM}{FN} = 1$$



Suy ra EF đi qua các trung điểm I, K của AB và CD

2.

$$S_{IJK} = S_{NJC} \Rightarrow S_{ICK} = S_{ICN} \Rightarrow KN//IC$$

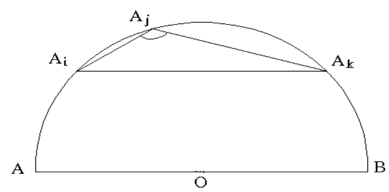


Khi đó theo (1) thì AJ đi qua trung điểm E của KN suy ra $S_{AKJ} = S_{ANJ}$ mà $S_{AKP} = S_{CJN}$ nên

$$S_{APJ} = S_{AIC} \Rightarrow PJ = JC \Rightarrow S_{BPJ} = S_{BJC}$$

Do $S_{BIM} = S_{IJK}$ nên từ đây ta có $S_{BIKP} = S_{CJIM}$. Tương tự ta chứng minh được $S_{CJIM} = S_{AKJN}$. Vậy diện tích của ba tứ giác không gạch chéo bằng nhau.

Bài 5. Trên nửa đường tròn đường kính AB ta lấy 1991 điểm khác nhau và khác $A, B : A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{1991}$. Giả sử A_i, A_j, A_k là ba điểm bất kỳ trong chúng, khi đó A_i, A_j, A_k không thẳng hàng. Giả sử trên nửa đường tròn đã cho A_J nằm giữa A_i và A_k (tức A_j thuộc cung nhỏ A_jA_k) khi đó $\widehat{A_iA_jA_k} > 90°$ và $\triangle A_iA_jA_k$ là tam giác tù



Vậy trên mặt phẳng tồn tại 1991 điểm mà ba điểm bất kỳ trong chúng là ba đỉnh của một tam giác tù.

2.5 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1991 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

1. Rút gọn

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}\sqrt[6]{44+16\sqrt{6}} \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}\sqrt[6]{(2\sqrt{3}+4\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt[3]{(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(2\sqrt{3}+4\sqrt{2})} = -\sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

2. $P = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$

   Đặt $a = x-y, \quad b = y-z, \quad z-x = -(a+b)$ Khi đó

$$\begin{aligned} P &= a^5 + b^5 - (a+b)^5 = (a+b)[a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 - (a+b)^4] \\ &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 - a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4) \\ &= (a+b)[-5(a^3b + a^2b^2 + ab^3)] = -5(a+b)ab(a^2+ab+b^2) \\ &= 5(x-y)(y-z)(z-x)[(x-y)^2 + (x-y)(y-z) + (y-z)^2] \\ &= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \end{aligned}$$

Bài 2.

1.

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0 \end{cases}$$

Từ phương trình 1 và 2 ta có $c = -(a+b), \quad \gamma = -(\alpha+\beta)$. Thay vào phương trình 3 ta được

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0 \\ &\quad \to (\alpha b + \beta a)(a+b) + (\alpha+\beta)ab = 0 \\ &\quad \to \alpha b^2 + \beta a^2 + 2ab(\alpha+\beta) = 0 \\ &\quad \to \alpha b^2 + \beta a^2 - 2ab\gamma = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Tương tự

$$\beta c^2 + \gamma b^2 - 2bc\alpha = 0 \qquad (2)$$
$$\gamma a^2 + \alpha c^2 - 2ca\beta = 0 \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) ta được

$$\begin{aligned} &(\beta+\gamma)a^2 + (\gamma+\alpha)b^2 + (\alpha+\beta)c^2 - 2(bc\alpha + ca\beta + ab\gamma) = 0 \\ \to &-(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2) = 2(bc\alpha + ca\beta + ab\gamma) = \\ &= 2abc\Big(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\Big) = 0 \end{aligned}$$

Vậy $A = \alpha a^2 + \beta + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0$

2. $0 \le a, b, c, d \le 1$. Đặt $P = a + b + c + d - ab - bc - cd - da$

a) Ta có

$$a - ab = a(1-b) \ge 0 \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{hoặc} \quad b = 1 \qquad (1)$$
$$b - bc \ge 0 \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow b = 0 \quad \text{hoặc} \quad c = 1 \qquad (2)$$
$$c - cd \ge 0 \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow c = 0 \quad \text{hoặc} \quad d = 1 \qquad (3)$$
$$d - da \ge 0 \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow d = 0 \quad \text{hoặc} \quad a = 1 \qquad (4)$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên ta được $P \ge 0$

Giả sử dấu "=" đạt được, khi đó cả bốn bất đẳng thức ở (1), (2), (3), (4) phải là đẳng thức. Từ (1) ta có $a = 0$ hoặc $b = 1$.

Nếu $a = 0$ thì từ (4) ta có $d = 0$, do đó từ (3) ta có $c = 0$ và từ (2) suy ra $b = 0$. Vậy $a = b = c = d = 0$

Nếu $b = 1$ thì từ (2) ta có $c = 1$, từ (3) ta có $d = 1$ và từ (4) suy ra $a = 1$. Vậy $a = b = c = d = 1$

Ngược lại dễ thấy với $a = b = c = d = 0$ hoặc $a = b = c = d = 1$ thì $p = 0$

Tóm lại: $P \geq 0, P = 0$ khi và chỉ khi $a = b = c = d = 0$ hoặc $a = b = c = d = 1$

b) Từ $(1-a)(a-b) \geq 0 \to 1 - a - b + ab \geq 0 \to a + b - ab \leq 1$.

Vậy

$$a + b - ab \leq 1, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow a = 1 \quad \text{hoặc} \quad b = 1 \quad (5)$$

Tương tự

$$b + c - bc \leq 1, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow b = 1 \quad \text{hoặc} \quad c = 1 \quad (6)$$
$$c + d - cd \leq 1, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow c = 1 \quad \text{hoặc} \quad d = 1 \quad (7)$$
$$d + a - da \leq 1, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow d = 1 \quad \text{hoặc} \quad a = 1 \quad (8)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}(a+c)(b+d) \geq 0 &\to ab + bc + cd + da \geq 0\\ &\to -(ab + bc + cd + da) \leq 0\\ \text{Dấu "=" đạt được} \quad &\Leftrightarrow a + c = 0 \quad \text{hoặc} \quad b + d = 0\\ &\to a = c = 0 \quad \text{hoặc} \quad b = d = 0 \qquad (9)\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức ở (5),(6),(7),(8) và (9) ta được $2p \leq 4$ hay $p \leq 2$

Nếu dấu "=" đạt được thì ở cả 5 bất đẳng thức đều có dấu "=", như vậy, từ (9) ta có $a = c = 0$ hoặc $b = d = 0$.

Với $a = c = 0$ thì từ (5), (7) suy ra $b = d = 1$.

Với $b = d = 0$ thì từ (5), (7) suy ra $a = c = 1$

Ngược lại, với $a = c = 0, b = d = 1$ hoặc $b = d = 0, a = c = 1$ thì $P = 2$.

Tóm lại $P \leq 2, P = 2$ khi và chỉ khi $a = c = 0, b = d = 1$ hoặc $b = d = 0, a = c = 1$

Chú ý: Có thể giải cách khác như sau:

$$\left.\begin{array}{l} P = (a+c)(1-b-d) + b + d \\ P = (b+d)(1-a-c) + a + c \end{array}\right\} \to$$
$$\begin{aligned}2P &= (a+c)(2-b-d) + (b+d)(2-a-c)\\ &\leq \frac{1}{4}[(a+c+2-b-d)^2 + (b+d+2-a-c)^2]\end{aligned}$$

Do $a+c+2-b-d \geq 0, \quad b+d+2-a-c \geq 0$ nên từ đây ta có.

$$2P \leq \frac{1}{4}[(a+c+2-b-d)+(b+d+2-a-c)]^2 = 4 \quad \text{hay} \quad P \leq 2$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} a+c+2-b-d=0 \\ b+d+2-a-c=0 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a=c=0, \quad b=d=1 \\ \ \ b=d=0, a=c=1 \end{array}\right.$$

(vì $0 \leq a, b, c, d \leq 1$)

Bài 3. Giả sử k là số tự nhiên thoả mãn $a < 10^k, \quad d < 10^k$. Đặt $a_n = a+nd$ và $x_n = \frac{a_n}{1991} = \frac{a}{1991} + n\frac{d}{1991}$

Do $\frac{a}{1991} < 10^k$ và $\frac{d}{1991} > 0$ nên tồn tại số tự nhiên m mà

$$x_{m-1} \leq 10^k < x_m \tag{1}$$

Mặt khác

$$x_m = x_{m-1} + \frac{d}{1991} < x_{m-1} + \frac{10^k}{1991} \leq 10^k + \frac{10^k}{1991} = \frac{1992.10^k}{1991} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$10^k < x_m < \frac{1992.10^k}{1991} \rightarrow 1991.10^k < 1991.x_m < 1992.10^k$$

Hay

$$1991.10^k < a_m < 1992.10^k$$

Do đó $a_m = a+md$ là số có bốn chữ số đầu tiên là 1991.

Bài 4. Gọi 100 người dự hội thảo là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{99}, a_{100}$. Giả sử a_1 quen biết với 67 người là $a_2, a_3, \ldots, a_{68}$.

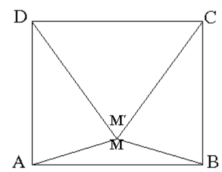
Khi đó không kể a_1 và 32 người là $a_{69}, a_{70}, \ldots, a_{100}$ thì a_2 quen biết với ít nhất 34 người trong số $a_3, a_4, \ldots, a_{68}$. Không mất tổng quát, giả sử a_2 quen biết với $a_3, a_4, \ldots, a_{36}$. Tương tự, không kể a_1, a_2 và 64 người là $a_{37}, a_{38}, \ldots, a_{100}$ thì a_3 quen biết với ít nhất một người trong số $a_4, a_5, \ldots, a_{36}$, chẳng hạn a_3 quen biết với a_4.

Từ đó ta có 4 người là a_1, a_2, a_3, a_4 đôi một quen biết nhau.

Bài 5. 1) Cùng phía với hình vuông đối với CD dựng tam giác đều $M'CD$. Khi đó $\triangle ADM$ cân ở D và $\triangle BCM$ cân ở C nên ta có

$$\widehat{ADM'} = \widehat{BCM'} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \rightarrow \widehat{DAM'} = \widehat{CBM'} = 75^\circ$$

Mặt khác, dễ thấy M' nằm cùng phía với hình vuông $ABCD$ đối với AB. Theo giả thiết thì M nằm trong hình vuông và $\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 15°$ suy ra $M' \equiv M$ hay $\triangle MCD$ đều



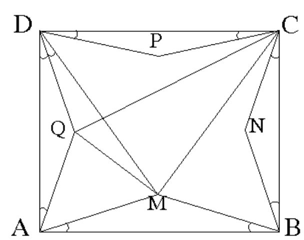
Chú ý: Có thể chứng minh bằng phản chứng như sau:

Giả sử $\triangle MCD$ không đều. Dễ thấy $\triangle AMD = \triangle BMC$ (c-g-c) suy ra $MC = MD, \widehat{MCD} = \widehat{MDC}$. Có hai khả năng

a) $\widehat{MDC} = \widehat{MCD} < 60°$ suy ra $MD < CD$ và $\widehat{ADM} > 30°$. Mà $\widehat{DAM} = 75°$ nên $\widehat{DMA} < 75\circ \rightarrow AD < MD < CD$ vô lý (Vì $ABCD$ là hình vuông).

b) $\widehat{MDC} = \widehat{MCD} > 60°$, lý luận tương tự dẫn đến điều vô lý, do đó giả thiết $\triangle MCD$ không đều là sai.

2) Trong hình vuông $ABCD$ dựng bốn điểm M, N, P, Q thoả mãn $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \widehat{NBC} = \widehat{NCB} = \widehat{PCD} = \widehat{PDC} = \widehat{QDA} = \widehat{QAD} = 15°$ thì theo chứng minh trên, bốn tam giác MCD, NDA, PAB và QBC là đều.



Ta chứng minh tập hợp 8 điểm $\{A, B, C, D, M, N, P, Q\}$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Có tất cả là $\frac{8.7}{2} = 28$ đoạn thẳng nối hai trong tám điểm trên. Ta chia chúng thành 6 nhóm sau:

a) 4 cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông $ABCD$

b) 2 đường chéo AC, BD của hình vuông $ABCD$

c) 4 cạnh MN, NP, PQ, QM của hình vuông $MNPQ$ (dễ thấy $MNPQ$ là hình vuông)

d) 2 đường chéo MP, NQ của hình vuông $MNPQ$

e) 8 đoạn $MA, MB, NB, NC, PC, PD, QD, QA$

f) 8 đoạn $MC, MD, ND, NA, PA, PB, QB, QC$

Ta chứng minh các đoạn ở nhóm e) và f) thoả mãn điều kiện bài toán.

(Việc chứng minh các đoạn ở các nhóm còn lại thoả mãn điều kiện bài toán đơn giản hơn, bạn đọc tự chứng minh)

Do $\triangle AMD$ cân ở D và $\widehat{ADQ} = \widehat{MDQ} = 15°$ nên DQ là trung trực của AM hay trung trực của AM đi qua hai điểm D, Q, đối với các đoạn khác ở nhóm e) chứng minh tương tự.

Do $\triangle MCD$ đều còn $\triangle MQD$ cân ở Q nên trung trực của MD đi qua hai điểm C, Q. Đối với các đoạn khác ở nhóm f) chứng minh tương tự.

2.6 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1992 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1.
$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2} \qquad (1)$$

Điều kiện: $x \geqslant \frac{5}{2}$

Nhân hai vế với $\sqrt{2}$ ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{(2x-5)+6\sqrt{2x-5}+9}+\sqrt{(2x-5)-2\sqrt{2x-5}+1}=4\\ \Rightarrow&\sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-5}-1)^2}=4\\ \Rightarrow&\sqrt{2x-5}+3+|\sqrt{2x-5}-1|=4 \qquad (2)\end{aligned}$$

Với $x \geqslant 3$ thì (2) có dạng

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x-5}+3+\sqrt{2x-5}-1=4 \Rightarrow \sqrt{2x-5}=1\\ \Rightarrow&2x-5=1 \Rightarrow x=3 \quad (\text{thoả mãn } x \geqslant 3)\end{aligned}$$

Với $\frac{5}{2} \leqslant x < 3$ thì (2) có dạng $\sqrt{2x-5}+3+1-\sqrt{2x-5}=4$ luôn thoả mãn.

Vậy nghiệm của (1) là $\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

2.
$$\begin{cases}xy^2-2y+3x^2=0\\ y^2+x^2y+2x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy^2-2y=-3x^2 & (1)\\ x^2y+2x=-y^2 & (2)\end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0, y = 0$ là một nghiệm của hệ và ngược lại nếu (x, y) là nghiệm mà x hoặc y bằng 0 thì số kia cũng bằng 0. Ta tìm nghiệm thoả mãn $x \neq 0, y \neq 0$.

Với điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$, chia (1) cho y^2 và (2) cho x^2 ta được hệ (1), (2) tương đương với

$$\begin{cases} x - \frac{2}{y} = -3\frac{x^2}{y^2} & (3) \\ y + \frac{2}{x} = -\frac{y^2}{x^2} & (4) \end{cases}$$

Nhân hai phương trình với nhau ta được hệ (3), (4) tương đương với

$$\begin{cases} x - \frac{2}{y} = -3\frac{x^2}{y^2} \\ \left(x - \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{2}{x}\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^2 - 2y = -3x^2 & (1) \\ xy - \frac{4}{xy} & (5) \end{cases}$$

Ta có (5) tương đương với

$$(xy)^2 - 3xy - 4 = 0 \Rightarrow xy = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 4 \end{array}\right.$$

Thay $xy = -1$ hay $y = -\frac{1}{x}$ vào (1) ta được

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = -3x^2 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

Thay $xy = 4$ hay $y = \frac{4}{x}$ vào (1) ta được

$$\frac{16}{x} - \frac{8}{x} = -3x^2 \Rightarrow x^3 = -\frac{8}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow y = -2\frac{[}{3}]3$$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là $x = y = 0; x = -1, y = 1$ và $x = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, y = -2\sqrt[3]{3}$

Bài 2.

$$x^2 - mnx + m + n = 0 \qquad (1)$$

Với $m = 0$ phương trình (1) có dạng $x^2 + n = 0$. Nếu phương trình có nghiệm nguyên a với $n \geqslant 0$ nào đó thì $a^2 + n = 0 \Rightarrow n = -a^2 < 0$ do đó $n = 0$ và nghiệm là $x = a = 0$. Lý luận tương tự đối với trường hợp $n = 0$.

Như vậy nếu một trong hai số m, n bằng 0 thì (1) có nghiệm nguyên suy ra số còn lại cũng bằng 0 và nghiệm là $x = 0$.

Ta xét trường hợp $m, n \geqslant 1$. Khi đó giả sử a, b là các nghiệm của (1), theo định lý Viét ta có

$$\begin{cases} a + b = mn \\ ab = m + n \end{cases} \tag{2}$$

Do $m, n \geqslant 1$ nên từ đây suy ra $a, b > 0 \Rightarrow a, b \geqslant 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geqslant 0$ hay

$$\begin{aligned} ab - a - b + 1 \geqslant 0 \Rightarrow m + n - mn + 1 \geqslant 0 \Rightarrow mn - m - n + 1 \leqslant 2 \\ \Rightarrow (m-1)(n-1) \leqslant 2 \end{aligned} \tag{3}$$

1. Với $m = 1$ thì (1) có dạng

   $$x^2 - nx + 1 + n = 0 \tag{2}$$

   $$x^2 + 1 = n(x-1) \Rightarrow n = \frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow n = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

   Nếu phương trình có nghiệm nguyên x thì $x - 1$ là ước của 2, do đó $x - 1 \in \{1, -1, 2, -2\}$.

   Với $x - 1 = 1$ tức $x = 2$ thì $n = 5$, phương trình (2) có dạng $x^2 - 5x + 6 = 0$ (có hai nghiệm $x = 2, x = 3$).

   Với $x - 1 = -1$ tức $x = 0$ thì $n = -1$ (loại).

   Với $x - 1 = 2$ tức $x = 3$ thì $n = 5$, phương trình $x = 2, x = 3$.

   Với $x - 1 = -2$ tức $x = -1$ thì $n = -1$ (loại).

   Vậy với $m = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm nguyên khi $n = 5$.

   Lý luận tương tự ta có với $n = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm nguyên khi $m = 5$. Ta xét trường hợp $m, n \geqslant 2$.

2. Với $m = 2$ thì từ (3) ta có $n = 2$ hoặc $n = 3$.

   Khi $n = 2$ thì (1) có dạng $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm nguyên $x = 2$.

   Khi $n = 3$ thì (1) có dạng $x^2 - 6x + 5 = 0$ có nghiệm nguyên là $x = 1$ và $x = 5$.

   Như vậy với $m = 2$ thì (1) có nghiệm nguyên khi $n = 2$ hoặc $n = 3$.

   Lý luận tương tự ta có với $n = 2$ thì (1) có nghiệm nguyên khi $m = 2$ hoặc $m = 3$.

3. Với $m, n \geqslant 3$ đẳng thức (3) không thoả mãn.

Tóm lại: Phương trình (1) có nghiệm nguyên (với m, n không âm) khi (m, n) là một trong các cặp số sau: $(0, 0); (1, 5); (5, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 2)$.

Bài 3.

$$S_{MNP} = S - S_{ABM} - S_{BCN} - S_{CAP}$$

Qua A' kẻ đường thẳng song song với BB' cắt CB' tại I, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MA'} &= \frac{AB'}{B'I} = \frac{AB'}{B'C}.\frac{B'C}{B'I} = 3.\frac{BC}{BA'} = 3.3 = 9 \\ \frac{AM}{AA'} &= \frac{AM}{AM + MA'} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ABA'}} = \frac{AM}{AA'} = \frac{9}{10} \\ \text{mà} \quad S_{ABA'} &= \frac{S}{3} \Rightarrow S_{ABM} = \frac{9}{10}S_{ABA'} = \frac{3}{10}S \end{aligned}$$

Tương tự: Qua B' kẻ đường thẳng song song với CC' cắt AC' tại H, ta có

$$\begin{aligned} \frac{BN}{NB'} &= \frac{BC'}{C'K} = \frac{BC'}{C'A}.\frac{C'A}{C'K} = 1.\frac{CA}{CB'} = 4 \\ \frac{BN}{BB'} &= \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{S_{BCN}}{S_{BCB'}} = \frac{BN}{BB'} = \frac{4}{5} \\ \text{mà} \quad S_{BCB'} &= \frac{S}{4} \Rightarrow S_{BCN} = \frac{4}{5}S_{BCB'} = \frac{S}{5} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta tính được

$$S_{CAP} = \frac{2}{5}S \Rightarrow S_{MNP} = S - \left(\frac{3}{10}S + \frac{S}{5} + \frac{2}{5}S\right) = \frac{S}{10}$$

Bài 4. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\angle BDM = \angle ADC \Rightarrow \angle CDM = \angle ADB$. Dễ thấy $\triangle BDM \backsim \triangle ADC \Rightarrow \frac{BM}{AC} = \frac{DH}{DI}$ (tỷ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỷ số đồng dạng), suy ra

$$\frac{BM}{DH} = \frac{AC}{DI} \tag{1}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} \triangle CDM \backsim \triangle ADB &\Rightarrow \frac{CM}{AB} = \frac{DH}{DK} \\ &\Rightarrow \frac{CM}{DH} = \frac{AB}{DK} \end{aligned} \tag{2}$$

Cộng (1) và (2) ta được

$$\frac{BC}{DM} = \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK}$$

Bài 5. Giả sử m, n nguyên dương và

$$\begin{cases} 2m+1 \vdots n \\ 2n+1 \vdots m \end{cases} \Rightarrow (2m+1)(2n+1) \vdots mn$$

$$\Rightarrow 2m+2n+1 \vdots mn \Rightarrow 2m+2n+1 = kmn \quad (k \in \mathbb{N}^*) \tag{1}$$

Suy ra: k, m, n đều lẻ. Vì

$$m \geqslant 1, n \geqslant 1 \Rightarrow (m-1)(n-1) \geqslant 0 \Rightarrow m+n \leqslant mn+1$$
$$2m+2n+1 \leqslant 2mn+3 \leqslant 5mn \tag{2}$$

Do đó từ (1) suy ra $k \leqslant 5$.

1. Với $k = 5 \Rightarrow 2m+2n+1 = 5mn$, từ (2) ta suy ra $3mn = 3 \Rightarrow m = n = 1$. Rõ ràng $m = n = 1$ thoả mãn $2m+1 \vdots n$ và $2n+1 \vdots m$.

2. Với $k = 3$, giả sử $m \geqslant n$, ta có $3mn = 2m+2n+1 \leqslant 5m \Rightarrow 3n \leqslant 5 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow 3m = 2m+3 \Rightarrow m = 3$. Rõ ràng $n = 1, m = 3$ thoả mãn $2m+1 \vdots n$ và $2n+1 \vdots m$. Với $m \leqslant n$ ta được $n = 3, m = 1$ thoả mãn.

3. Với $k = 1$, giả sử $m \geqslant n$, ta có $mn = 2m+2n+1 \leqslant 5m \Rightarrow n \leqslant 5 \Rightarrow n = 1$ hoặc $n = 3$ hoặc $n = 5$.

   Với $n = 1$ đẳng thức $mn = 2m+2n+1$ trở thành $m = 2m+3$ vô lý

   Với $n = 3$ ta có $3m = 2m+6+1 \Rightarrow m = 7$. Rõ ràng $n = 3, m = 7$ thoả mãn điều kiện $2m+1 \vdots n; 2n+1 \vdots m$.

   Với $n = 5$ ta có $5m = 2m+10+1 \Rightarrow m = \frac{11}{3}$ (loại).

Với $m \leqslant n$ lý luận tương tự ta được $m = 3, n = 7$ thoả mãn điều kiện $2m+1 \vdots n; 2n+1 \vdots m$.

Tóm lại: Có 5 cặp số (m, n) thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$(1,1); (1,3); (3,1); (3,7); (7,3)$$

.

2.7 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1992 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

1.
$$P = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = (n^2 + n)^2 + (n^2 + n) + 7$$

Do n nguyên nên $n^2+n \geqslant 0$. Đặt $k = n^2+n$ ta có $P = k^2+k+7 > k^2$. Ta có:
$$P < (k+3)^2 \quad (\text{vì} (k+3)^2 - P = 5k + 2 > 0)$$

Do đó $k^2 < P < (k+3)^2 \Rightarrow P = (k+1)^2$ hoặc $p = (k+2)^2$.

Với $P = (k+1)^2$ tức $k^2 + k + 7 = k^2 + 2k + 1$ ta thu được $k = 6 \Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n = 2$ và $n = -3$.

Với $P = (k+2)^2$ tức $k^2 + k + 7 = k^2 + 4k + 4$ ta thu được $k = 1 \Rightarrow n^2 + n = 1 \Rightarrow n = 2$ không có nghiệm nguyên.

Vậy P là số chính phương khi $n = 2$ và $n = -3$ (khi đó $P = 49$).

2.
$$A = \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab}$$

Đặt $x = a^2 + 2bc, y = b^2 + 2ac, z = c^2 + 2ab$ thì $x, y, z > 0$ và $x+y+z = (a+b+c)^2 \leqslant 1$, do $(x+y+z)A = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$ mà $x + y + z \leqslant 1$ nên $A \geqslant 9$.

Bài 2. Với $n \in \mathbb{N}$ ta ký hiệu tổng các chữ số của n là $S(n)$. Ta có
$$N = (2^9)^{1945} = (2^3)^{3.1945} = 8^{5835} < 10^{5835}$$

Nên N có không quá 5835 chữ số mà $a = S(N) \leqslant 5835.9 = 52515$ suy ra a có không quá 5 chữ số, $b = S(a) \leqslant 5.9 = 45$. Trong các số tự nhiên từ 0 đến 45 thì số có tổng các chữ số lớn nhất là 39 và tổng các chữ số của nó là 12. Suy ra $S(b) \leqslant 12$.

Ta biết rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $S(n) \equiv n \pmod 9$, do đó $S(b) \equiv b = S(a) \equiv a = S(N) \pmod 9$. Mà $N = 8^{5835}$ suy ra $N \equiv -1 \pmod 9$ hay $S(b) \equiv -1 \pmod 9$. Do $S(b) \leqslant 12$ nên $S(b) = 8$.

Vậy tổng các chữ số của b là 8.

Bài 3. Giả sử K nằm ngoài đoạn BC về phía C (trường hợp $AB > AC$), khi đó dễ thấy $\angle ACK$ nhọn và $\angle ACB$ tù suy ra cung AB không chứa C lớn hơn cung ACE. Trên cung AB không chứa C lấy điểm E sao cho cung BE bằng cung AC, khi đó $ACBE$ là hình thang cân.

Ta có $\angle AEB + \angle EAB = \angle EAC + \angle EAB = 2(\angle EAB + \angle BAD) = 2\angle EAD = 90^\circ$ suy ra $\angle ABE = 90^\circ$ nên AE là đường kính của đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Do đó

$$AB^2 + AC^2 = AB^2 + EB^2 = AE^2 = 4R^2$$

Chú ý: Có thể chứng minh bằng cách lấy điểm M trên cung AB không chứa C sao cho cung AM bằng cung AC, sau đó chứng minh $\angle BAM = 90^\circ$, từ đó suy ra đẳng thức $AB^2 + AC^2 = 4R^2$

Bài 4. Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1, d_2, \ldots, d_{1992}$ và giao điểm của đường thẳng d_i, d_k là A_{ik} hoặc A_{ki}.

a) Xét đường thẳng d_i bất kỳ trong 1992 đường thẳng đã cho. Do không có 3 đường thẳng nào đồng quy nên các giao điểm A_{kl} của các cặp đường thẳng $d_k, d_l (k \neq i, l \neq i)$ đều nằm ngoài d_i. Do số giao điểm đó là hữu hạn nên có 1 giao điểm gần nó nhất, giả sử đó là A_{kl}. Ta chứng minh tam giác $A_{kl}A_{ki}A_{li}$ là tam giác xanh. Thật vậy nếu tam giác đó bị đường thẳng d_m nào đó trong 1989 đường thẳng còn lại cắt thì d_m phải cắt một trong hai đoạn $A_{kl}A_{ki}$ hoặc $A_{kl}A_{li}$, giả sử d_m cắt đoạn $A_{kl}A_{ki}$ tại A_{km} thì A_{km} gần d_i hơn A_{kl}, trái với giả thiết A_{kl} là điểm gần d_i nhất. Như vậy với mỗi đường thẳng d_i luôn tồn tại một tam giác xanh có cạnh nằm trên nó. Trên mỗi d_i ta chọn một cạnh của một tam giác xanh thì ta thu được 1992 cạnh khác nhau của các tam giác xanh. Từ đó suy ra số tam giác xanh không ít hơn $1992 : 3 = 664$.

b) Xét đường thẳng d_i trong số 1992 đường thẳng đã cho. Nếu trong mỗi nửa mặt phẳng có bờ là d_i đều có các giao điểm của các cặp đường thẳng còn lại thì trong mỗi nửa mặt phẳng ta lấy giao điểm gần d_i nhất và lý luận như câu a) ta được hai tam giác xanh nằm về hai phía của d_i. Hai tam giác đó có hai cạnh nằm trên d_i và hai cạnh đó là khác nhau (không có ba đường nào đồng quy).

Ta chứng minh rằng số đường thẳng mà các giao điểm của các cặp đường thẳng còn lại nằm về cùng một phía của nó không vượt quá 2. Thật vậy, giả sử có 3 đường thẳng như vậy, chẳng hạn đó là d_i, d_k, d_l. Khi đó xét đường thẳng d_n khác, d_n cắt d_i, d_k, d_l tại 3 điểm phân biệt A_{ni}, A_{nk}, A_{nl}. Trong 3 điểm đó có 1 điểm nằm giữa hai điểm kia, giả sử A_{nk}. Khi đó hai giao điểm A_{ni} và A_{nl} nằm về hai phía của d_k trái với giả thiết.

Vậy có ít nhất 1990 đường thẳng mà về hai phía của mỗi đường đều có các giao điểm của các đường thẳng còn lại. Theo lý luận ở trên thì có hai tam giác xanh nằm về hai phía của mỗi đường thẳng đó và có hai cạnh khác nhau nằm trên nó. Trong hai đường thẳng còn lại, trên mỗi đường thẳng có ít nhất một cạnh của một tam giác xanh. Như vậy số cạnh khác nhau của các tam giác xanh không ít hơn $1990 \times 2 + 2 = 3982 = 1327.3 + 1$. Suy ra số tam giác xanh không ít hơn $1327 + 1 = 1328$.

Bài 5.

2.8 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1993 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1. Giải phương trình

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 2 \qquad (1)$$

Điều kiện: $x \geqslant -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow x + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = 2 \\
&\Rightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow x + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} - \sqrt{2} \\
&\Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} (\text{thoả mãn điều kiện } x \geqslant -\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 2xy^2 + (8y^2 + x^2)y = 0 & (1) \\ 8y^2 + x^2 = 12 & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) tương đương với

$$x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0 \qquad (3)$$

Dễ thấy hệ không có nghiệm với $y = 0$, vì nếu $y = 0$ thì từ (3) suy ra $x = 0$ không thoả mãn (2).

Với $y \neq 0$ tương đương với

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 8 = 0 \qquad (4)$$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ thì (4) có dạng

$$t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0 \Rightarrow (t+2)(t^2 - t + 4) = 0 \Rightarrow t = -2$$

Từ đó $\frac{x}{y} = -2 \Rightarrow x = -2y$. Thay vào (2) ta được

$$12y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 2$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $x = 2, y = -1$ và $x = -2, y = 1$

Bài 2. Trước hết ta chứng minh rằng: Với $a, b, c, d \geqslant 0$ thì

$$abcd \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \tag{1}$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Ta có với $a, b \geqslant 0$ thì $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b$. Do đó với $a, b, c, d \geqslant 0$ thì

$$\begin{aligned} abcd &\leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}.\frac{c+d}{2}\right)^2 \\ &\leqslant \left[\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \\ &\Rightarrow abcd \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \end{aligned}$$

Nếu trong a, b, c, d có một số bằng 0 thì dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = d = 0$.

Nếu cả 4 số a, b, c, d đều dương thì dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \\ a + b = c + d \end{cases} \qquad \Rightarrow a = b = c = d$$

Tóm lại $abcd \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Xét

$$A = x^2y(4 - x - y) \quad \text{với} \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6 \tag{1}$$

a) Giá trị lớn nhất:

Với $x + y \geqslant 4$ thì $A \leqslant 0$

Với $x + y < 4$ ta có

$$A = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.y(4 - x - y) \leqslant 4\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + 4 - x - y}{4}\right)^4 = 4$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $\frac{x}{2} = y = 4 - x - y \Rightarrow x = 2, y = 1$.

Vậy A đạt giá trị lớn nhất bằng 4 đạt được khi $x = 2, y = 1$ (thoả mãn điều kiện (1)).

b) Giá trị bé nhất.

Với $x + y \leqslant 4$ thì $A \geqslant 0$.

Với $4 < x + y \leqslant 6$ ta có

$$\begin{aligned} -\frac{A}{4} = \frac{x}{2}.\frac{x}{2}.y(x + y - 4) &\leqslant \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + x + y - 4}{4}\right)^4 = \left[\frac{2(x+y) - 4}{4}\right]^4 \\ &\leqslant \left(\frac{2.6 - 4}{4}\right)^4 = 16 \end{aligned}$$

Vì $x+y \leqslant 6$ nên $A \geqslant -64$. Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $\frac{x}{2} = y = x+y-4$ và $x+y=6 \Rightarrow x=4, y=2$.

Vậy A đạt giá trị bé nhất bằng -64, đạt được khi $x=4, y=2$.

Bài 3. Kẻ đường trung trực của AB cắt AC ở O_1, cắt BD ở O_2 thì O_1, O_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ suy ra $R = O_1A, r = O_2B$.

$\triangle AIO_1 \backsim \triangle AOB \Rightarrow \dfrac{O_1A}{AB} = \dfrac{AI}{AO} \Rightarrow R = O_1A = \dfrac{AB.AI}{AO} = \dfrac{a^2}{AC} \Rightarrow \dfrac{1}{R^2} = \dfrac{AC^2}{a^4}$

Tương tự:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{BD^2}{a^4} \Rightarrow \frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{AC^2+BD^2}{a^4} = \frac{4AB^2}{a^4} = \frac{4}{a^2}$$

Bài 4. Giả sử trên đường tròn (O) chiều đi từ $A \to B \to C \to A$ là ngược chiều kim đồng hồ và giả sử quay $\triangle ABC$ một góc 90° thuận chiều kim đồng hồ quanh (O) ta thu được $\triangle A_1B_1C_1$. Khi đó A_1, B_1, C_1 thuộc các cung nhỏ AC, AB, BC tương ứng. Do đó cạnh A_1B_1 phải cắt các cạnh AB, AC, giả sử lần lượt tại M, N. Tương tự ta có cạnh A_1C_1 cắt các cạnh AC, BC lần lượt tại P, Q và cạnh B_1C_1 cắt các cạnh BC, BA lần lượt tại T, K, suy ra phần chung của hai hình tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ là lục giác $MNPQTK$. Gọi diện tích lục giác đó là S thì

$$S = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{BKT} - S_{CPQ}$$

Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Khi quay một góc 90° thì $OA_1 \perp OA, OB_1 \perp OB, OC_1 \perp OC$ mà $BC \perp OA$ nên $OA_1 \parallel BC$, tương tự: $OB_1 \parallel CA, OC_1 \parallel AB$.

Gọi giao điểm của OA_1 với AC là E. Do các cung AA_1, BB_1, CC_1 có số đo bằng 90° nên $\angle AMN = 90^\circ$ mà $\angle MAN = 60^\circ$ nên suy ra $AN = 2AM$.

Dễ thấy $\triangle NEA_1$ cân ở E (các góc ở đáy bằng 30°). Do $OE \parallel BC$ còn AO bằng $\frac{2}{3}$ trung tuyến AA' của $\triangle ABC$ nên

$$AE = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{\sqrt{3}}R, OE = \frac{BC}{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow EN = EA_1 = OA_1 - OE = R - \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AN = AE - EN = \frac{2}{\sqrt{3}}R - \left(R - \frac{R}{\sqrt{3}}\right) = (\sqrt{3}-1)R$$

$$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{AM.MN}{2} = \frac{1}{2}\frac{AN}{2}\frac{AN\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}AN^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(4-2\sqrt{3}}{8}R^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}R^2$$

Tương tự ta có $S_{BKT} = S_{CPQ} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}R^2$.

Vậy

$$S = \frac{9-3\sqrt{3}}{4}R^2$$

.

Bài 5.

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{ab+bc+ca+a+b+c}{abc} \qquad (1)$$

Ta chứng minh ba số a, b, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Nếu abc là lẻ thì mỗi số a, b, c đều lẻ.

Nếu abc là chẵn thì một trong ba số phải chẵn, chẳng hạn a chẵn. Vì tử số ở (1) chia hết cho abc nên tử số phải chẵn suy ra $bc + b + c$ chẵn hay $(b+1)(c+1) - 1$ chẵn $\Rightarrow (b+1)(c+1)$ lẻ. Vậy $b+1$ và $c+1$ là lẻ hay b, c chẵn. Vậy a, b, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Vì a, b, c đôi một khác nhau nên ta có thể giả sử rằng $a < b < c$. Khi đó, $a \leqslant 2$, vì nếu $a \geqslant 3$ thì $b \geqslant 5, c \geqslant 7$, do đó

$$A \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{21} < 1$$

Suy ra A không nguyên.

a) Với $a = 2$ thì $b \geqslant 4, c \geqslant 6$ và

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{bc} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \\ + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} = \frac{28}{24} < 2$$

$\Rightarrow A = 1$.

Với $b \geqslant 6$ thì $c \geqslant 8$ khi đó

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{46}{48} < 1$$

$\Rightarrow A$ không nguyên

Do đó $b = 4$. Vậy $a = 2$ thì $b = 4$ suy ra $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{c} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{2c}$.

Từ đây ta thu được $c = 14$.

Vậy với $a = 2$ ta được nghiệm là $a = 2, b = 4, c = 14$.

Chú ý: Từ điều kiện $a = 2$ và $A = 1$ ta được phương trình

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{bc} \Rightarrow \frac{2b+2c+b+c+2}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3b + 3c + 2 = bc \Rightarrow (b-3)(c-3) = 11 \Rightarrow \begin{cases} b-3 = 1 \\ c-3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 14 \end{cases}$$

Do đó ta cũng tìm được nghiệm trên.

b) $a = 1$, khi đó $b \geqslant 3, c \geqslant 5$ và

$$A = 1 + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{1}{bc} = \frac{32}{15} < 3$$

mà $A > 1 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{1}{bc} = 1$

Khi đó nếu $b \geqslant 5$ thì $\frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{1}{bc} < 1$, do đó b chỉ có thể là 3. Với $b = 3$ ta được $\frac{2}{3} + \frac{2}{c} + \frac{1}{3c} = 1 \Rightarrow c = 7$.

Vậy với $a = 1$ ta được nghiệm là $a = 1, b = 3, c = 7$.

Tóm lại, với giả thiết $a < b < c$ ta có hai nghiệm là $(2, 4, 14)$ và $(1, 3, 7)$. Thay đổi vai trò a, b, c ta thu được 12 nghiệm là các cách sắp thứ tự của ba số 2, 4, 14 và ba số 1, 3, 7.

2.9 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1994 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1.

$$x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0 \tag{1}$$

Phân tích vế trái thành các nhân tử ta được (1)

$$(x-2)^2(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -1 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = 1$, $x = -1 + \sqrt{3}$, và $x = -1 - \sqrt{3}$

2.

$$x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$$
$$x^2 + 4 + 2x - 3\sqrt{(x^2 + 4)x} = 0$$

Điều kiện: $x \geqslant 0$

Đặt: $\sqrt{x^2 + 4} = u$, $\sqrt{x} = v$ thì phương trình có dạng:

$$u^2 + 2v^2 - 3uv = 0$$
$$(u - v)(u - 2v) = 0$$
$$u = \left[\begin{array}{l} v \\ 2v \end{array}\right.$$

Với $u = v$ ta được $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 4 = x$ vô nghiệm.

Với $u = 2v$ ta được $\sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2$.

Bài 2.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{xy} + 2\sqrt{zt} \\ A^2 &= xy + 4zt + 4\sqrt{xyzt} = xy + 4zt + 2(2\sqrt{yz}.\sqrt{xt}) \leq \\ &\leqslant xy + 4zt + 2yz + 2xt = 9 \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra $A \leqslant 3$.

Dấu "=" đạt chẳng hạn khi $x = y = z = t = 1$, (thoả mãn $xy + 4zt + 2yz + 2xt = 9$).

Vậy A đạt giá trị lớn nhất bằng 3.

Bài 3.

$$\begin{cases} xy - 3zt = 1 \quad (1) \\ xz + yt = 2 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y^2 - 6xyzt + 9z^2t^2 = 1 \quad (3) \\ x^2z^2 + 2xyzt + y^2t^2 = 4 \quad (4) \end{cases}$$

Nhân (4) với 3 và cộng từng vế với (3) ta có

$$x^2y^2 + 9z^2t^2 + 3x^2z^2 + 3y^2t^2 = 13$$

Vì x, y, z, t là các số nguyên mà tổng các hệ số của vế trái là 16 nên nếu x, y, z, t thoả mãn hệ đã cho thì phải có một số bằng 0.

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì từ (1) ta có: $-3zt = 1$, vô lý.

Nếu $z = 0$ hệ có dạng

$$\begin{cases} xy = 1 \\ yt = 2 \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm nguyên là: $x = y = 1, t = 2$ và $x = y = -1, t = -2$

Nếu $t = 0$ hệ có dạng

$$\begin{cases} xy = 1 \\ xz = 2 \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm nguyên là: $x = y = 1, z = 2$ và $x = y = -1, z = -2$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm nguyên là

$$\begin{aligned} &x = y = 1, z = 0, t = 2; \qquad x = y = -1, z = 0, t = -2 \\ &x = y = 1, t = 0, z = 2; \qquad x = y = -1, t = 0, z = -2 \end{aligned}$$

Bài 4. Gọi tâm đường tròn đã cho là O và trung điểm của AB là I thì $OI \perp AB$ và $AI = BI = AD = DC$. Đặt $CD = x$.

Do $AH \parallel OB$ (cùng $\parallel BC$), nên $\angle OBI = \angle BAH$. Từ đó suy ra

$$\triangle OBI \backsim \triangle BAH \Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{OA}{AB}$$
$$\Rightarrow AH = \frac{AI.AB}{OA} = \frac{2x^2}{R} \qquad (2.1)$$

Mặt khác do đường tròn (O) tiếp xúc với BC tại B nên

$$CD.CA = BC^2 = 4BH^2 = 4(AB^2 - AH^2) = 16x^2 - 4AH^2$$
$$\Rightarrow 2x^2 = 16x^2 - 4AH^2$$
$$\Rightarrow AH^2 = \frac{7}{2}x^2 \qquad (2.2)$$

Từ (2.1) và (2.2) ta suy ra

$$\frac{4x^4}{R^2} = \frac{7}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{8}R^2 \Rightarrow x = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Vậy

$$AD = x = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \qquad (2.3)$$

Từ (2.1) và (2.3) suy ra

$$AH = \frac{7}{4}R \Rightarrow HB^2 = AB^2 - AH^2 = 4x^2 - \frac{49}{16}R^2 = \frac{28}{8}R^2 - \frac{49}{16}R^2 = \frac{7}{16}R^2$$

Do $HE.HA = HB^2$ nên ta có

$$HE = \frac{HB^2}{HA} = \frac{R}{4} \Rightarrow AE = AH - HE = \frac{3}{2}R$$

Bài 5. Do $BC > AC$ nên $\angle BAC > \angle ABC$. Trong nửa mặt phẳng có bờ là AB và chứa C kẻ tia Bx sao cho $\angle ABx = \angle BAC$. Bx cắt đường thẳng MN tại P thì M nằm giữa N và P (vì $\angle ABP > \angle ABM$). Khi đó $ABPN$ là hình thang cân nên $\angle APN = \angle BNP$. Xét $\triangle AMP$ ta có: $\angle AMP > \angle ANM > \angle BNM \equiv \angle BNP = \angle APN \equiv \angle APM$.

Do đó: $AM < AP = BN$.

2.10 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1994 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = 4xy^2z & (1) \\ (y+z)(z+x) = 4yz^2x & (2) \\ (z+x)(x+y) = 4zx^2y & (3) \end{cases}$$

Rõ ràng $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ. Ngược lai, dễ thấy nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ mà môt trong ba số x, y, z bằng 0 thì hai số kia cũng bằng 0.

Ta tìm nghiệm thoả mãn $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Ta chứng minh nếu (x, y, z) là nghiệm mà $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ thì $x = y = z$. Thật vậy, nếu (x, y, z) thoả mãn (1), (2), (3) thì $x + y \neq 0, y + z \neq 0, z + x \neq 0$, do đó chia (1) cho (2) ta được

$$\frac{x+y}{z+x} = \frac{y}{z} \Rightarrow xz + yz = yz + xy \Rightarrow x(y - z) = 0 \Rightarrow y = z$$

Tương tự, chia (2) cho (3) ta thu được $z = x$.

Vậy với điều kiện $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ hệ (1),(2),(3) tương đương với

$$\begin{cases} x = y = z \\ 4x^2 = 4x^4 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \pm 1$$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là

$$(x, y, z) = \left[\begin{array}{c} (0,0,0) \\ (1,1,1) \\ (-1,-1,-1) \end{array}\right.$$

Bài 2.

$$12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x + y) \Rightarrow 3(4x^2 + 2xy + y^2) = 28(x + y) \qquad (1)$$

Do 3 và 28 nguyên tố cùng nhau nên $x + y \vdots 3$ hay $x + y = 3k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Từ (1) suy ra

$$3x^2 + (x + y)^2 = 28k \Rightarrow 3x^2 + 9k^2 = 28k \Rightarrow k \vdots 3 \quad \text{hay} \quad k = 3n (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Rightarrow x^2 + 3k^2 = 28n \quad \text{mà} \quad k = 3n \Rightarrow x^2 + 27n^2 = 28n \Rightarrow x^2 = n(28 - 27n) \geqslant 0$$
$$\Rightarrow n\left(\frac{28}{27} - n\right) \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant n \leqslant \frac{28}{27} \Rightarrow n = 0 \quad \text{hoặc} \quad n = 1$$

Với $n = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

Với $n = 1 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 8 \\ x = -1; y = 10 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm nguyên là

$$x = y = 0; x = 1, y = 8 \quad \text{và} \quad x = -1, y = 10$$

Bài 3. Ký hiệu $A = 1.2.3\dots n = n!$ (đọc là n giai thừa). Ta có

$$B = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geqslant 3)$$

Với $n = 3$ thì rõ ràng $A = B = 6$ suy ra $A \vdots B$.

Ta xét $n \geqslant 4$. Khi đó có hai khả năng sau:

a) $n+1$ là số nguyên tố. Ta chứng minh A không chia hết cho B. Thật vậy, nếu $A \vdots B$ thì

$$n! = k\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 2(n-1)! = k(n+1)$$

Điều này vô lý vì $n+1$ là số nguyên tố nên $(n+1)$ và các số $1, 2, \dots, n-1$ là nguyên tố cùng nhau.

b) $n+1$ là hợp số. Khi đó

$$n + 1 = p.q \quad (p, q \in \mathbb{N}, p, q \geqslant 2) \tag{1}$$

Suy ra $n+1 \geqslant 2p$ hay $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.

Do $n > 3$ ta có $2n > n+3$ suy ra $2n-2 > n+1$ hay $\frac{n+1}{2} < n-1$ nên $p < n-1$. Tương tự $q < n-1$.

Do đó nếu $n+1$ có thể viết được dưới dạng (1) với $p \neq q$ thì p, q là các số tự nhiên nhỏ hơn $n-1$ nên trong tích $(n-1)! = 1.2.3\dots(n-1)$ có hai thừa số là p và q suy ra

$$(n-1)! \vdots (p-q) = n+1 \Rightarrow n! \vdots n(n-1) \Rightarrow A \vdots B$$

Nếu $n+1$ có dạng (1) với $p = q$ tức $n+1 = p^2 (p \geqslant 2)$ và p là hợp số thì $n+1$ cũng có dạng (1) với $p \neq q$ do đó $A \vdots B$.

Ta xét trường hợp $n+1 = p^2$ với p số nguyên tố. Khi đó, do $n+1 \geqslant 5$ nên $p \geqslant 3$ suy ra $p^2 \geqslant 9$ hay $n \geqslant 8$. Ta chứng minh

$$p^2 = n + 1 < \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Ta có (2) tương đương với

$$4n + 4 < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow n^2 - 6n - 3 > 0 \Rightarrow (n^2 - 8n) + (2n - 3) > 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $n > 8$, do vậy (2) đúng. Từ (2) suy ra $p < \frac{n-1}{2}$. Khi đó $(n-1)! = 1.2\dots p.(p+1\dots(n-1)$. Do $(n-1) > 2p$ nên tích $(p+1)\dots(n-1)$ có nhiều hơn p thừa số do đó có một thừa số chia hết cho p nên ta có

$$(n-1)! \vdots p^2 = n+1 \Rightarrow n! \vdots n(n+1) \Rightarrow A \vdots B$$

Kết hợp với trường hợp $n = 3$ ta có kết luận:

Với $n+1$ là số nguyên tố thì A không chia hết cho B.

Với $n+1$ là hợp số thì $A \vdots B$.

Bài 4. Ta chứng minh rằng với $x, y \geqslant 1$ ta có

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{xy}} \tag{1}$$

Ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}
&(1+y)(1+\sqrt{xy}) + (1+x)(1+\sqrt{xy}) - 2(1+x)(1+y) \geqslant 0\\
\Rightarrow &1+\sqrt{xy}+y+y\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}+x+x\sqrt{xy}-2-2x-2y-2xy \geqslant 0\\
\Rightarrow &x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}-2xy-x-y+2\sqrt{xy} \geqslant 0\\
\Rightarrow &\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0\\
\Rightarrow &(\sqrt{xy}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng vì $x, y \geqslant 1$ hay (1) đúng (có thể thấy rằng dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$).

Áp dụng với $a, b, c \geqslant 1$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+a} + \frac{3}{1+b} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{2}{1+b} &\geqslant 2\Big(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b}\Big)\\
&\geqslant \frac{4}{1+\sqrt{b\sqrt{ab}}} = \frac{4}{1+\sqrt[4]{ab^3}}
\end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{1}{1+a} + \frac{3}{1+b} \geqslant \frac{4}{1+\sqrt[4]{ab^3}} \tag{2}$$

Tương tự

$$\frac{1}{1+b} + \frac{3}{1+c} \geqslant \frac{4}{1+\sqrt[4]{bc^3}} \tag{3}$$

và

$$\frac{1}{1+c} + \frac{3}{1+a} \geqslant \frac{4}{1+\sqrt[4]{ca^3}} \tag{4}$$

Cộng (2), (3), (4) rồi chia cho 4 ta được bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài 5.

1. Giả sử $\angle BAC = 20^\circ$. Trên các cạnh AB, AC lấy các điểm D, K tương ứng sao cho $AD = KC = BC$ (chú ý $AB = AC > BC$). Ta chứng minh $AD = DK = KC$

   Phía trong $\triangle ABC$ dựng tam giác đều BCI thì A, I nằm trên trung trực của BC suy ra AI là phân giác của góc $\angle BAC$. Khi đó $\angle ACB = 80^\circ \Rightarrow \angle ACI = 20^\circ = \angle CAD$, mà $AD = BC = CI$ nên dễ thấy $ACID$ là hình thang cân (đáy là AC và ID), từ đó ta có $AC \parallel ID \Rightarrow \angle DIA = \angle IAC = \angle IAD = 10^\circ \Rightarrow \triangle ADI$ cân ở D. Suy ra $ID = AD = CK$ nên $CIDK$ là hình bình hành suy ra $DK = BC$.

   Vậy $AD = DK = KC = CB$.

2. Ngược lại, giả sử tồn tại các điểm D và K trên các cạnh AB, AC tương ứng sao cho $AD = DK = KC = CB$. Kẻ đoạn thẳng CI song song, cùng chiều và bằng KD thì $CKDI$ là hình bình hành và là hình thoi. Do $CI = DK = AD$ và $\angle DAC = \angle AKD = \angle ACI$ nên $ACID$ là hình thang cân.

   Vì CD là phân giác của $\angle ACI$ ($CKDI$ là hình thoi) nên dễ thấy AI là phân giác của góc $\angle DAC$ từ đó ta có AI là trung trực của BC suy ra $IB = IC = BC$ hay $\triangle IBC$ đều. Đặt $\angle BAC = x$, ta có

   $$\angle ABI = \angle ACI = \angle BAC = x \Rightarrow \angle IBC + \angle ICB + 3x = 180^\circ$$

   hay

   $$120^\circ + 3x = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC = x = 20^\circ$$

2.11 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1995 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ xy + x^2 = 2(2x^2 - y^2) & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra

$$2y^2 + xy - 3x^2 = 0 \Rightarrow (y-x)(2y+3x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{array}\right.$$

Với $y = x$ thay vào (1) ra được phương trình: $x^2 = 1$
Do đó hệ có nghiệm là $x = y = \pm 1$
Với $y = -\frac{3}{2}x$ thay vào (1) ta được phương trình: $-\frac{x^2}{2} = 1$ (vô nghiệm)
Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $x = y = 1$ và $x = y = -1$.
Bài 2.

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3 \tag{2.4}$$

Điều kiện: $-4 \leqslant x \leqslant 1$. Khi đó (2.4) tương đương với

$$\begin{aligned} &1 - x + 4 + x + 2\sqrt{(1-x)(4+x)} = 9 \\ \Rightarrow &\sqrt{4 - 3x - x^2} = 2 \\ \Rightarrow &4 - 3x - x^2 = 4 \\ \Rightarrow &x^2 + 3x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện.
Vậy phương trình (2.4) có hai nghiệm: $x = 0$ và $x = -3$.
Bài 3.

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab} = \frac{(a+b)^2 + (a+b)}{ab} - 2$$

Do $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}$ nên

$$\frac{(a+b)^2 + (a+b)}{ab} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)^2 + (a+b) = ka \tag{1}$$

với $k \in \mathbb{N}$. Nếu $d > 0$ là ước số chung của a, b thì $a = md, b = nd, (n, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow a + b = (m+n)d, ab = mnd^2$. Do đó (1) có dạng

$$\begin{aligned} &(m+n)^2 d^2 + (m+n)d = kmnd^2 \\ \Rightarrow &m + n = [kmn - (m+n)^2]d = ld \quad (l \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow &a + b = ld^2 \geqslant d^2 \Rightarrow d \leqslant \sqrt{a+b} \end{aligned}$$

Bài 4. Gọi diện tích của hai hình chữ nhật là S thì ta có:

$ab = cd = S \Rightarrow b = \dfrac{S}{a}, d = \dfrac{S}{c}$ và

$a + b - (c + d) = a + \dfrac{S}{a} - (c + \dfrac{S}{c}) = a - c - (\dfrac{S}{c} - \dfrac{S}{a}) = (a - c)(1 - \dfrac{S}{ac} > 0$

(vì $a > c > d$ nên $a - c > 0$ và $\frac{S}{ac} < \frac{S}{dc} = 1$).

Vậy $a + b > c + d$ và chu vi hình chữ nhật thứ nhất lớn hơn chu vi hình chữ nhật thứ hai.

Bài 5.

1. Dễ thấy $\triangle ABE \backsim \triangle AEC$ nên ta có:
$$\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AE^2 = AB.AC$$
$$\Rightarrow AF = AE = \sqrt{AB.AC} \quad \text{không đổi}$$
Vậy E, F luôn chạy trên đường tròn cố định tâm A, bán kính $\sqrt{AB.AC}$.

2. Giả sử $O \notin BC$ và đường thẳng OI cắt cung BC không chứa F tại M. Khi đó do A, E, F, O, I cùng thuộc đường tròn tâm AO nên trong mọi trường hợp ta có
$$\angle EOM = \angle EFI \equiv \angle EFE' = \frac{1}{2}\angle EOE'$$
Vậy OM là đường phân giác của góc $\angle EOE'$ suy ra $OM \perp EE'$ hay $OI \perp EE'$. Mà $OI \perp BC$ nên $EE' \parallel BC \equiv AB$.

   Trường hợp $O \in BC$ khi đó $O \equiv I$ thì $\angle FEE' = 90^0$ mà $FE \perp BC$ nên $EE' \parallel BC$.

3. Giả sử $O \neq I$. Gọi giao điểm của BC và EF là P thì đường tròn ngoại tiếp $\triangle ONI$ là đường tròn đường kính $OP (\angle PNO = \angle PIO = 90°)$. Dễ thấy $AP.AI = AN.AO = AE^2 = AB.AC \Rightarrow AP = \frac{AB.AC}{AI}$ không đổi, mà P thuộc tia AB cố định nên P cố định.

   Gọi trung điểm của PI là K thì K cố định và tâm O' của đường tròn đường kính OP (tức đường tròn ngoại tiếp $\triangle ONI$) luôn nằm trên đường thẳng d cố định vuông góc với BC ở K.

2.12 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1995 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.
$$\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)\left(y + \sqrt{y^2+3}\right) = 3 \tag{1}$$

Ta có:
$$\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)\left(-x + \sqrt{x^2+3}\right) = 3 \tag{2}$$
$$\left(y + \sqrt{y^2+3}\right)\left(-y + \sqrt{y^2+3}\right) = 3 \tag{3}$$

Nhân (2) với (3) và chia cho (1) ta được:

$$\Big(-x+\sqrt{x^2+3}\Big)\Big(-y+\sqrt{y^2+3}\Big)=3 \tag{4}$$

$$(1)\Rightarrow xy+x\sqrt{y^2+3}+y\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+3}.\sqrt{y^2+3}=3 \tag{5}$$
$$(4)\Rightarrow xy-x\sqrt{y^2+3}-y\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+3}.\sqrt{y^2+3}=3 \tag{6}$$

Trừ (5) cho (6) ta được

$$x\sqrt{y^2+3}+y\sqrt{x^2+3}=0$$

Suy ra x, y trái dấu hoặc cùng bằng 0 và

$$\begin{aligned} x\sqrt{y^2+3}=-y\sqrt{x^2+3} &\Rightarrow x^2(y^2+3)=y^2(x^2+3)\\ &\Rightarrow 3x^2=3y^2\Rightarrow |x|=|y|\Rightarrow x=-y \end{aligned}$$

(vì x, y trái dấu hoặc cùng bằng 0) nên $E=x+y=0$

Bài 2.

$$\begin{cases} x+xy+y=1\\ y+yz+z=3\\ z+zx+x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=2 & (1)\\ (y+1)(z+1)=4 & (2)\\ (z+1)(x+1)=8 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=2\\ (y+1)(z+1)=4\\ [(x+1)(y+1)(z+1)]^2=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=2\\ (y+1)(z+1)=4\\ (x+1)(y+1)(z+1)=\pm 8 \end{cases}$$

Với $(x+1)(y+1)(z+1)=8$ ta có:

$$x+1=2, y+1=1, z+1=4\Rightarrow x=1, y=0, z=3$$

Với $(x+1)(y+1)(z+1)=-8$ ta có:

$$x+1=-2, y+1=-1, z+1=-4\Rightarrow x=-3, y=-2, z=-5$$

Vậy hệ có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{c} x=1, y=0, z=3\\ x=-3, y=-2, z=-5 \end{array}\right.$$

Chú ý: Có thể giải bằng cách nhân (1) với (3) rồi chia cho (2) ta được $(x+1)^2=4\Rightarrow x+1=\pm 2$ từ đây dễ dàng tìm được các nghiệm.

Bài 3. Từ giả thiết $x, y \geqslant 0, x^2 + y^2 = 1$ suy ra với $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ ta có

$$\begin{cases} x^3 \leqslant x^2 \\ y^3 \leqslant y^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 \leqslant x^2 + y^2 = 1$$

(Dễ thấy dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = 1, y = 0$ hoặc $x = 0, y = 1$)

Ta có:

$$\begin{aligned} 1 = (x^2 + y^2)^3 &= x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 \\ 2(x^3 + y^3)^2 &= 2x^6 + 4x^3y^3 + 2y^6 \end{aligned}$$

Trừ hai đẳng thức cuối ta được

$$\begin{aligned} &2(x^3 + y^3)^2 - 1 = x^6 + y^6 + 4x^3y^3 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 \\ &= (x^3 - y^3)^2 - 3x^2y^2(x - y)^2 = (x - y)^2[(x^2 + xy + y^2)^2 - 3x^2y^2] \\ &= (x - y)^2[x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3] \geqslant 0 \quad (\text{vì} \quad x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 > 0) \end{aligned}$$

Vậy $2(x^3 + y^3)^2 \geqslant 1$ hay $x^3 + y^3 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Chú ý: Có thể chứng minh bất đẳng thức cuối một cách ngắn gọn hơn (nhưng vượt ngoài chương trình!) bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Buniacovski như sau: Ta có:

$$\begin{aligned} &(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2 \Rightarrow x + y \leq \sqrt{2} \\ &\qquad 1 = (x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x}\sqrt{x^3} + \sqrt{y}\sqrt{y^3})^2 \leq (x + y)(x^3 + y^3) \\ &\qquad \Rightarrow x^3 + y^3 \geq \frac{1}{x + y} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Bài 4. Đặt $a = \overline{a_1a_2a_3}$ thì $\overline{b_1b_2b_3} = 2a$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3} = 10^6a + 2.10^3a + a = (10^3 + 1)^2a = 1001^2.a \\ &= 7^2.11^2.13^2.a \end{aligned}$$

Vì A viết được dưới dạng $A = p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2$, trong đó p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố khác nhau, nên ba trong bốn số p_1, p_2, p_3 phải là $7, 11, 13$ còn số thứ tư có bình phương bằng a. Do đó a là bình phương của một số nguyên tố khác $7, 11, 13$.

Chú ý rằng: $100 \leq a = \frac{1}{2}b < \frac{1000}{2} < 500$ suy ra $a = 17^2$ hoặc $a = 19^2$. Vậy có hai số thoả mãn điều kiện bài toán là

$$A = 289.578.289, \quad \text{và} \quad A = 361.722.361$$

Bài 5. Gọi diện tích tam giác IAN, ICN, IBM, IDM lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4. Do $BM = DM$ nên

$$S_3 = S_4 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1}{S_3}.\frac{S_4}{S_2} = \frac{IA.IN}{IB.IM}.\frac{ID.IM}{IC.IN} = \frac{IA}{IC}.\frac{ID}{IB}$$

Do

$$\triangle IAC \backsim \triangle IDB \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{IA}{IC}$$

Vậy

$$\frac{AN}{NC} = \frac{IA^2}{IC^2}$$

2.13 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1996 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

$$P = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6+\frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\right]^2 - \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) = 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqslant 6\sqrt{x.\frac{1}{x}} = 6$$

Suy ra $P \geqslant 6$. Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1 (x > 0)$. Vậy P đạt giá trị bé nhất bằng 6, đạt được khi $x = 1$.

Bài 2.

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2-\frac{1}{y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 2 \end{cases} \quad \text{Điều kiện:} \quad x \geqslant \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}$$

Đặt $u = \frac{1}{\sqrt{x}}, v = \frac{1}{\sqrt{y}}$ khi đó hệ có dạng

$$\begin{cases} u + \sqrt{2-v^2} = 2 \\ v + \sqrt{2-u^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2-v^2} = 2-u \\ \sqrt{2-u^2} = 2-v \end{cases}$$

Điều kiện: $u \leq \sqrt{2}, v \leq \sqrt{2}$ khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} 2-v^2 = 4-4u+u^2 \\ 2-u^2 = 4-4v+v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2-4u+2 = 0 \\ u^2+v^2-4v+2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(u-v) = 0 \\ u^2+v^2-4v+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u^2-4u+2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u = v = 1 \quad (\text{thoả mãn } u \leq \sqrt{2}, v \leq \sqrt{2})$$

Từ đó ta có: $x = y = 1$ là nghiệm của hệ đã cho.

Bài 3.

$$n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n$$

Do $6n \,\vdots\, 6$ còn $(n-1)n(n+1)$ là ba số nguyên liên tiếp nên trong chúng có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3, do vậy $(n-1)n(n+1) \,\vdots\, 6$. (Chú ý rằng 2 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Vậy $n^3 + 5n \,\vdots\, 6$ với mọi n nguyên dương.

Bài 4.

$$\frac{a^3}{b} + ab \geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{b}.ab} = 2a^2$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $\frac{a^3}{b} = ab \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b(a > 0, b > 0)$. Vậy

$$\frac{a^3}{b} + ab \geqslant 2a^2, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow a = b$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{c} + bc \geqslant 2b^2, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow b = c$$
$$\frac{c^3}{a} + ca \geqslant 2c^2, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow c = a$$

Ngoài ra

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + bc + ca) \qquad (1)$$
$$\text{dấu bằng đạt được khi và chỉ khi} \quad a = b = c$$

Cộng 4 bất đẳng thức cuối và giản ước ta được

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant ab + bc + ca, \quad \text{dấu "=" đạt được} \quad \Leftrightarrow a = b = c$$

Chú ý: Bất đẳng thức (1) chứng minh dễ dàng bằng cách chuyển vế và đưa về tổng các bình phương.

Bài 5.

1. Đặt $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$ ta có

$$\begin{aligned} S &= BM^2 + BN^2 + CN^2 + CP^2 + DP^2 + DQ^2 + AQ^2 + AM^2 \\ &= (AM^2 + BM^2) + (BN^2 + CN^2) + (CP^2 + DP^2) + (DQ^2 + AQ^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

(a) Do

$$AM^2+BM^2 \geqslant \frac{(AM+BM)^2}{2} = \frac{a^2}{2}, \text{dấu "=" đạt được} \Leftrightarrow AM = BM$$

Tương tự $BN^2+CN^2 \geqslant \frac{a^2}{2}, CP^2+DP^2 \geqslant \frac{a^2}{2}, DQ^2+AQ^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$, các dấu "=" tương ứng đạt được khi và chỉ khi $BN = CN, CP = DP, DQ = AQ$. Do đó từ (1) ta có $S \geqslant 2a^2$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh tương ứng chứa chúng.

(b)

$$AM^2 + BM^2 \leqslant (AM+BM)^2 = a^2, \quad \text{dấu "=" đạt được}$$
$$\Leftrightarrow AM = 0 \quad \text{hoặc} \quad BM = 0 \Leftrightarrow M \quad \text{trùng với } A \text{ hoặc } B.$$

Tương tự
$BN^2 + CN^2 \leqslant a^2$, dấu "=" đạt được khi N trùng với B hoặc C
$CP^2 + DP^2 \leqslant a^2$, dấu "=" đạt được khi P trùng với C hoặc D
$DQ^2 + AQ^2 \leqslant a^2$, dấu "=" đạt được khi Q trùng với D hoặc A
Do đó từ (1) ta có $S \leqslant 4a^2$, dấu "=" đạt được khi M, N, P, Q trùng với một trong hai đầu mút của các đoạn thẳng chứa chúng.

2. Nếu N, P, Q thuộc các cạnh BC, CD, DA tương ứng mà $MNPQ$ là hình vuông thì $\angle AMQ + \angle BMN = 90^\circ$ nên $\angle AMQ = \angle BNM (\angle AQM = \angle BMN)$ suy ra $\triangle AMQ = \triangle BMN \Rightarrow AM = BN$. Tương tự ta có $BN = CP = DQ = AM$. Do đó nếu $MNPQ$ là hình vuông thì $BN = CP = DQ = AM$.

   Ngược lại dễ thấy nếu $BN = CP = DQ = AM$ thì bốn tam giác vuông AMQ, BNM, CPN, DQP bằng nhau suy ra $MN = NP = PQ = QA$, ngoài ra $\angle AMQ + \angle BMN = 90^\circ \Rightarrow \angle QMN = 90^\circ$ và do đó $MNPQ$ là hình vuông.

   Vậy: $MNPQ$ là hình vuông khi và chỉ khi $BN = CP = DQ = AM$.

2.14 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1996 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x-1}+1)^3 + 2\sqrt{x-1} = 2-x \\
\Rightarrow\ & \sqrt{x-1}+1)^3 + [(x-1) + 2\sqrt{x-1}+1] - 2 = 0 \\
\Rightarrow\ & \sqrt{x-1}+1)^3 + (\sqrt{x-1}+1)^2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x-1}+1=t$ thì phương trình có dạng

$$\begin{aligned} & t^3+t^2-2=0 \\ \Rightarrow\quad & (t-1)(t^2+2t+2)=0 \\ \Rightarrow\quad & t=1 \end{aligned}$$

Hay $\sqrt{x-1}+1=1 \Rightarrow x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 2.

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1 & (1) \\ y-\sqrt{z}=1 & (2) \\ z-\sqrt{x}=1 & (3) \end{cases} \qquad \text{Điều kiện:} x,y,z>0$$

Nếu (x,y,z) là nghiệm thì $x=y=z$. Thật vậy giả sử x là số bé nhất trong ba số x,y,z. Khi đó do $x \leqslant y$ nên từ (1) và (2) ta có $y \leqslant z$. Khi đó từ (2) và (3) suy ra $z \leqslant x$. Vậy $x=y=z$. (Trường hợp y hoặc z là số bé nhất chứng minh tương tự).

Từ nhận xét trên ta suy ra hệ (1), (2), (3) tương đương với hệ

$$\begin{cases} x=y=z & (4) \\ x=\sqrt{x}+1 & (5) \end{cases}$$

Giải (5) ta được

$$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x=y=z=\sqrt{3+\sqrt{5}}2$.

Bài 3. Từ giả thiết $x+y=201$ và x,y nguyên dương ta có $1 \leqslant x,y \leqslant 200$ và $y=201-x$

$$P=x(x^2+y)+y(y^2+x)=x^3+y^3+2xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+2xy$$

Thay $x+y=201$ ta được $P=201^3-601xy$.

Ta chứng minh $200 \leqslant xy \leqslant 100.101$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} & xy-200=x(201-x)-200=200x+x-x^2-200= \\ & =x(200-x)+(x-200)=(x-1)(200-x)\geqslant 0, \quad (\text{Vì}\quad 1\leqslant x\leqslant 200) \end{aligned}$$

Vậy $xy \geqslant 200$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\left[\begin{aligned} & x=1 \quad \text{và} \quad y=200 \\ & x=200 \quad \text{và} \quad y=1 \end{aligned}\right.$$

Do đó $P \leqslant 201^3 - 601.200 = 8000401$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, y = 200 \\ x = 200, y = 1 \end{array}\right.$$

Suy ra P đạt giá trị lớn nhất bằng 8000401.

Tiếp tục ta có

$$\begin{aligned} &100.101 - xy = 100.101 - x(201 - x) = 100.101 - 101x - 100x + x^2 = \\ &= 101(100 - x) - x(100 - x) = (100 - x)(101 - x) \geqslant 0 \Rightarrow xy \leqslant 100.101 \end{aligned}$$

Dấu "=" đạt được khi

$$\left[\begin{array}{l} x = 101, y = 100 \\ x = 100, y = 101 \end{array}\right. \Rightarrow P \text{ đạt giá trị bé nhất bằng } 2050501$$

Chú ý: Có thể giải bài toán bằng cách xét khoảng tăng, giảm của hàm số $f(x) = xy = x(201) = -x^2 + 201x$ trên $[1; 200]$. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và bé nhất của $f(x)$ với x nguyên, $x \in [1; 200]$ và giá trị lớn nhất, bé nhất của P.

Bài 4. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính $BC = 2R$. Do khoảng cách từ O đến (d) bé hơn $R = \frac{BC}{2}$ nên đường tròn đó cắt (d) tại hai điểm A_1, A_2 và đường tròn ngoại tiếp $\triangle A_1BC$ và $\triangle A_2BC$ có bán kính bằng $R = \frac{BC}{2}$.

1. Trên (d) ta lấy điểm $A \neq A_1$ và $A \neq A_2$. Khi đó A không thuộc đường tròn đường kính BC nên $\angle BAC \neq 90°$ suy ra BC là một dây không phải là đường kính của đường tròn (O', R') ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow 2R'BC = 2R$ hay $R' > R$.

   Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ đạt giá trị bé nhất bằng $\frac{BC}{2}$, đạt được khi A trùng với A_1 hoặc A_2.

   Chú ý: Có thể giải câu (1) cách khác như sau:

   Do tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ chạy trên đường trung trực của BC nên bán kính của đường tròn đó là $IB \geqslant OB = \frac{BC}{2}$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $I \equiv O$. Do đó đường tròn có bán kính bé nhất là đường tròn đường kính BC và điểm A phải tìm là một trong hai điểm A_1, A_2 nói trên.

2. Giả sử h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao hạ từ A, B, C đến BC, CA, AB tương ứng và h là khoảng cách giữa (d) và BC thì $h_a = h$ không

đổi nên diện tích $\triangle ABC$ có diện tích $S = \frac{1}{2}BC.h$ không đổi. Ta có $AB.AC \geqslant 2S$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $\angle BAC = 90°$. Do đó

$$h_a.h_b.h_c = h.\frac{2S}{AC}.\frac{2S}{AB} \leqslant h.2S = BC.h^2$$

Dấu "=" đạt được khi $\angle BAC = 90°$ nghĩa là A là giao điểm của (d) với đường tròn đường kính BC tức là A trùng với A_1 hoặc A_2.

Vậy $h_a.h_b.h_c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $BC.h^2$, đạt được khi A trùng với A_1 hoặc A_2.

Bài 5. (Dành cho chuyên toán)
Trước tiên ra chứng minh rằng: Với mọi số x_1, x_2, y_1, y_2 ta có

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \qquad (1)$$

Thật vậy bình phương hai vế và rút gon ra được (1) tương đương với

$$\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} \geqslant x_1y_1 + x_2y_2 \qquad (2)$$

Nếu $x_1y_1 + x_2y_2 < 0$ thì (2) hiển nhiên đúng. Với $x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant 0$ thì lại bình phương hai vế và rút gon ta được (2) tương đương với

$$x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) \geqslant 2x_1y_1x_2y_2 \Rightarrow (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, vậy (1) đúng.

Áp dụng hai lần bất đẳng thức (1) ta được

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}+\sqrt{y_1^2 + y_2^2}+\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \geqslant \sqrt{(x_1 + y_1 + z_1)^2 + (x_2 + y_2 + z_2)^2} \quad (3)$$

Trở lại bài toán, với $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leqslant \frac{3}{2}$, áp dụng (3) ta có

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \\
&\geqslant \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \\
&= \sqrt{[4(x + y + z)]^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 15(x + y + z)^2} \\
&\geqslant \sqrt{8(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 15(x + y + z)^2} = \sqrt{Q}
\end{aligned}$$

Do $x, y, z > 0$ nên $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$ và do $0 < x+y+z \geq \frac{3}{2}$ suy ra $-15(x+y+z)^2 \geqslant -\frac{135}{4}$

Do đó

$$\sqrt{Q} \geqslant \sqrt{72 - \frac{135}{4}} = \sqrt{\frac{135}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$$

Vậy $P \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{17}$. Có thể thấy dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 5. (Dành cho chuyên tin)

Ta chứng minh rằng không thể chuyển được tất cả các viên bi vào một hình quạt được.

Ta tô màu đen 7 hình quạt như hình vẽ và gọi 7 hình quạt còn lại là hình quạt trắng.

Ở thời điểm ban đầu số bi ở các hình quạt đen và số bi ở các hình quạt trắng là số lẻ (cùng bằng 7). Dễ thấy qua một bước biến đổi số bi ở các hình quạt trắng hoặc giữ nguyên, hoặc tăng thêm hai hoặc giảm đi hai viên. Do đó, sau mỗi bước biến đổi bất kỳ số bi ở các hình quạt trắng và số bi ở các hình quạt đen đều là số lẻ. Vì vậy không thể chuyển được cả 14 viên bi vào cùng một hình quạt sau một bước nào cả.

2.15 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1997 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

$$x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^3}}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(6\sqrt{3}-10)}}{1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 4x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad P = (x^3 - 4x + 1)^{1997} = 1$$

Bài 2.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5\sqrt{x} \qquad (1)$$

Điều kiện: $x \geqslant 0$. Bình phương hai vế của (1) và giản ước ta được (1) tương đương với.

$$2\sqrt{x+3}.\sqrt{x+8} = 23x - 11 \Rightarrow \begin{cases} 4(x+3)(x+8) = (23x-11)^2 & (2) \\ x \geq \frac{11}{23} & (3) \end{cases}$$

Giải (2) ta được hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{21}$ (loại vì không thỏa mãn (3).
Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Bài 3.

$$\begin{cases} 2xy = x + y + 1 \\ 2yz = y + z + 7 \\ 2xz = z + x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xy = 2x + 2y + 2 \\ 4yz = 2y + 2z + 14 \\ 4xz = 2z + 2x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-1)(2y-1) = 3 \\ (2y-1)(2z-1) = 15 \\ (2z-1)(2x-1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-1)(2y-1) = 3 & (1) \\ (2y-1)(2z-1) = 15 & (2) \\ [(2x-1)(2y-1)(2z-1)]^2 = 15^2 & (3) \end{cases}$$

(3) tương đương với $(2x-1)(2y-1)(2z-1) = \pm 15$

Nếu $(2x-1)(2y-1)(2z-1) = 15$ thì từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ 2y - 1 = 3 \\ 2z - 1 = 5 \end{cases}$

Do đó hệ có nghiệm là: $x = 1, y = 2, z = 3$

Nếu $(2x-1)(2y-1)(2z-1) = -15$ thì từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} 2x - 1 = -1 \\ 2y - 1 = -3 \\ 2z - 1 = -5 \end{cases}$

Do đó hệ có nghiệm là: $x = 0, y = -1, z = -2$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là: $(x, y, z) = \left[\begin{array}{l} (1, 2, 3) \\ (0, -1, -2) \end{array} \right.$

Bài 4.

- Với $n = 0$ thì $2^n + 15 = 16$ là số chính phương.
- Với $n = 1$ thì $2^n + 15 = 17$ không phải là số chính phương.
- Với $n \geqslant 2$ thì 2^n chia hết cho 4, như vậy $2^n + 15$ chia cho 4 dư 3.

Dễ thấy mọi số chính phương m đều chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1. Thật vậy, nếu số chính phương m là bình phương m là bình phương của số chẵn thì rõ ràng $m \vdots 4$. Còn nếu m là bình phương của số lẻ tức $m = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ thì m chia cho 4 dư 1.

Do đó với $n \geqslant 2$ số $2^n + 15$ không thể là số chính phương (vì $2^n + 15$ chia cho 4 dư 3).

Vậy chỉ với $n = 0$ thì $2^n + 15$ là số chính phương.

Bài 5.

1. Gọi các tiếp điểm của (O, R) và (O', R') với cạnh BC lần lượt là M, N thì OM và $O'N$ vuông góc với BC. Do $\triangle ABC$ đều nên $\angle OBM = \angle O'CN = 30^\circ$. Do đó

   $$BM = R\sqrt{3}, CN = R'\sqrt{3} \Rightarrow MN = BC - BM - CN = 1 - \sqrt{3}(R + R')$$

   Trong hình thang vuông $OMNO'$ ta luôn có

   $$MN \leqslant OO' \Rightarrow 1 - \sqrt{3}(R + R') \leqslant R + R' \Rightarrow (\sqrt{3} + 1)(R + R') \geqslant 1$$
   $$\Rightarrow R + R' \geqslant \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

   Dấu đẳng thức có được khi và chỉ khi $OO' \parallel MN \Rightarrow OM = O'N$ hay $R = R' = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

   Vậy $R + R' \geqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Dấu đẳng thức có được khi $R = R' = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

2. Gọi S và S' là diện tích các hình tròn (O, R) và (O', R') ta có

   $$S + S' = \pi(R^2 + R'^2) \geqslant \frac{\pi}{2}(R + R')^2 \geqslant \frac{\pi}{2}\Big(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\Big)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}\pi$$

   Các bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $R = R' = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

   Vậy $S + S'$ đạt min bằng $\frac{2-\sqrt{3}}{4}\pi$, đạt được khi $R = R' = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

2.16 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1997 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0 & (1) \\ x^2 + xy = 3 & (2) \end{cases}$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0 \\ x(x + y) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(x + y) + 3x - 6y = 0 \\ x + y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2\frac{3}{x} + 3x - 6y = 0 \\ x + y = \frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 6xy = 0 & (3) \\ x + y = \frac{3}{x} & (4) \end{cases}$$

(3) tương đương với $3(x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$. Thay vào (4) ta được:

$$2x = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $x = y = \sqrt{\frac{3}{2}}$ và $x = y = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

Bài 2.

1. Với y chẵn thì $1992x^{1993} + 1993y^{1994}$ là số chẵn ($x \in \mathbb{Z}$). Do đó phương trình $1992x^{1993} + 1993y^{1994} = 1995$ không có nghiệm nguyên với y chẵn.

2. Với y lẻ thì y^{997} là số lẻ, giả sử $y^{1997} = 2k+1$, khi đó

$$\begin{aligned}1993y^{1994} = 1993(y^{997})^2 = 1993(2k+1)^2 &= 1993(4k^2+4k+1)\\ &= 4[1993(k^2+k)] + 1993\end{aligned}$$

   Nên $1993y^{1994}$ chia 4 dư 1 suy ra $1992x^{1993} + 1993y^{1994}$ chia 4 dư 1 (vì $1992 \vdots 4$). Trong khi đó 1995 chia cho 4 dư 3 nên phương trình đã cho không có nghiệm nguyên với y lẻ.

   Vậy phương trình đã cho không có nghiệm x, y nguyên.

Bài 3. Giả sử 1997 viết được dưới dạng tổng của n hợp số $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $1997 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, nhưng không viết được dưới dạng tổng của $n+1$ hợp số. Khi đó dễ thấy:

1. Mỗi hợp số $a_i (i = 1, \ldots, n)$ không viết được dưới dạng tổng của hai hợp số.

2. Tổng của hai hợp số a_i, a_k không viết được dưới dạng tổng của ba hợp số.

Do 1997 là lẻ nên trong số $a_1, \ldots, a_n$ phải có một hợp số là lẻ và nếu a_i là hợp số lẻ thì nó phải là 9. Thật vậy: $1, 3, 5, 7, 11, 13$ không phải là hợp số còn nếu $a_i \geqslant 15$ thì $a_i = 9 + (a_i - 9)$, trong đó 9 là hợp số còn $a_i - 9$ là số chẵn $\geqslant 6$ nên nó cũng là hợp số, như vậy a_i viết được dưới dạng tổng của hai hợp số, trái với giả thiết thứ nhất.

Ngoài ra không thể có quá một hợp số bằng 9, vì nếu có hai trường hợp số bằng 9 thì tổng của chúng bằng 18 là tổng của ba hợp số ($18 = 6+6+6 = 4+6+8 = \cdots$), trái với giả thiết thứ hai.

Vậyt trong số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có đúng một hợp số lẻ và số đó là 9. Không mất tổng quát, giả sử $a_1 = 9$. Khi đó

$$1997 = 9 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1988 \qquad (*)$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các hợp số chẵn.

Dễ thấy hợp số chẵn chỉ có thể là 4 hoặc 6. Vì nếu a_i là hợp số chẵn $\geqslant 8$ thì $a_i = 4 + (a_i - 4)$, trong đó 4 và $a_i - 4$ (là số chẵn $\geqslant 4$) đều là hợp số, trái với nhận xét thứ nhất.

Số hợp số bằng 6 không quá 1, vì nếu có 2 hợp số bằng 6 thì tổng 2 hợp số đó bằng $12 = 4 + 4 + 4$ là tổng của 3 hợp số, trái với nhận xét thứ hai.

Nhưng nếu có đúng một hợp số bằng 6 còn các hợp số còn lại bằng 4 thì tổng $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ không chia hết cho 4 mà $1988 \vdots 4$, trái với giả thiết (*). Do đó không có hợp số bằng 6.

Vậy $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ đều bằng 4 và từ (*) ta có:

$$
\begin{aligned}
&(n-1)4 = 1988 \Rightarrow n = 498 \\
&(1997 = 9 + \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{(498\text{SỐ}4)})
\end{aligned}
$$

Bài 4. Dễ dàng chứng minh được hai kết luận sau:

a) Với $x, y, z > 0$ ta có $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y = z$.

b) Trong $\triangle ABC$ với các chiều cao h_a, h_b, h_c và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r ta có:

$$
\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}
$$

Chứng minh.

a) Trước tiên dễ thấy $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}\frac{y}{x}} = 2$, dấu "=" đạt được khi $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = y (x, y > 0)$. Áp dụng ta có:

$$
\begin{aligned}
(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \\
&\geqslant 3 + 2 + 2 + 2 = 9
\end{aligned}
$$

dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y = z$.

b) Từ công thức tính diện tích tam giác $S = \frac{ah_a}{2} = p.r$ (p là nửa chi vi tam giác) ta có:

$$
\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2pr}
$$

Tương tự

$$\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2pr}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2pr}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2pr} = \frac{1}{r}$$

Bây giờ ta xét

$$M = \frac{1}{h_a + 2h_b} + \frac{1}{h_b + 2h_c} + \frac{1}{h_c + 2h_a}$$

Ta có

$$(h_a + 2h_b)\Big(\frac{1}{h_a} + \frac{2}{h_b}\Big) = (h_a + h_b + h_b)\Big(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b}\Big) \geqslant 9$$
$$\Rightarrow \frac{1}{h_a + 2h_b} \leqslant \frac{1}{9}\Big(\frac{1}{h_a} + \frac{2}{h_b}\Big) \quad \text{dấu "=" đạt được} \Rightarrow h_a = h_b$$

Tương tự

$$\frac{1}{h_b + 2h_c} \leqslant \frac{1}{9}\Big(\frac{1}{h_b} + \frac{2}{h_c}\Big) \quad \text{dấu "=" đạt được} \Rightarrow h_b = h_c$$

và

$$\frac{1}{h_c + 2h_a} \leqslant \frac{1}{9}\Big(\frac{1}{h_c} + \frac{2}{h_a}\Big) \quad \text{dấu "=" đạt được} \Rightarrow h_c = h_a$$

Cộng ba bất đẳng thức cuối ta được

$$M \leqslant \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\Big) = \frac{1}{3}.\frac{1}{r} = \frac{1}{3} \quad (\text{vì} \quad r = 1)$$

dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $h_a = h_b = h_c \Rightarrow a = b = c$ suy ra $\triangle ABC$ đều.

Vậy M đạt max bằng $\frac{1}{3}$, đạt được khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều, (khi đó $h_a = h_b = h_c = 3$).

Bài 5. Vì 16 điểm được tô bằng 3 màu nên phải có ít nhất 6 điểm được tô cùng một màu. Giả sử 6 điểm đó là $A, B, C, D, E, F4$. Xét 5 đoạn thẳng

AB, AC, AD, AE, AF. Vì 5 đoạn đó được tô bởi hai màu tím và nâu, nên có ít nhất 3 đoạn được tô cùng màu, giả sử đó là ba đoạn AB, AD, AF và chúng được tô bằng màu tím. Khi đó nếu một trong 3 đoạn BD, DF, FB cũng được tô bằng màu tím, chẳng hạn đoạn BD, thì ta được $\triangle ABD$ có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu tím. (Nếu DF hoặc FB được tô màu tím ta lý luận tương tự).

Nếu cả 3 đoạn BD, DF, FB đều không được tô màu tím thì cả 3 đoạn phải được tô màu nâu và khi đó $\triangle BDF$ có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu nâu.

Vậy ta luôn tìm được một tam giác thoả mãn điều kiện bài toán.

2.17 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1998 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1. Giải phương trình
$$\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x^2+8}=4 \qquad (1)$$
Điều kiện: $x^2 \leqslant 2$. Bình phương hai vế, rut gọn và chuyển vế ta được (1) tương đương với
$$\sqrt{-x^4-6x^2+16}=3 \Rightarrow -x^4-6x^2+16=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=1 & \\ x^2=-7 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$
Nghiệm của phương trình là: $x=\pm 1$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 & (1)\\ x^4+x^2y^2+y^4=21 & (2) \end{cases}$$
Cách 1: Đặt $\begin{cases} x^2+y^2=u\\ xy=v \end{cases}$ thì hệ (1), (2) có dạng
$$\begin{cases} u+v=7\\ u^2-v^2=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=7\\ u-v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=5\\ v=2 \end{cases}$$
Từ đó ta có hệ
$$\begin{cases} x^2+y^2=5\\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=9\\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\pm 3\\ xy=2 \end{cases}$$

Giải hai hệ

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$$

Ta thu được nghiệm là

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Cách 2: (2) tương đương với

$$(x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \Rightarrow (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy) = 21$$

Do đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$$

Sau đó giải tiếp tục như cách 1.

Bài 2.

$$\begin{cases} a^3-3ab^2=19 \\ b^3-3a^2b=98 \end{cases}$$

Bình phương hai vế của các đẳng thức trên và cộng lại ta được

$$a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=9965 \Rightarrow (a^2+b^2)^3=9965 \Rightarrow a^2+b^2=\sqrt[3]{9965}$$

Bài 3. Do $a,b,c \in [0,1]$ nên

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 0 &\Rightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc \geqslant 0 \\ &\Rightarrow a+b+c-ab-bc-ca \leqslant 1-abc \leqslant 1\end{aligned}$$

Do $a,b,c \in [0,1]$ nên $b^2 \leqslant b, c^3 \leqslant c$. Từ đó ta có

$$a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leqslant a+b+c-ab-bc-ca \leqslant 1$$

Bài 4.

1. a) Do AI và BI vuông góc nên I chạy trên đường tròn cố định đường kính AB.

   b) Kẻ đường kính BC. Dễ thấy:

   - Nếu M thuộc nửa đường tròn đường kính BC không chứa A thì I thuộc đoạn thẳng AM và N thuộc cung lớn AB.

- Nếu M thuộc cung nhỏ AC thì góc $\angle BAM$ tù, do đó I nằm trên MA kéo dài về phía A. Khi đó điểm N có thể thuộc cung nhỏ AB (H2), hoặc cung lớn AB (H3).

Trong cả ba trường hợp trên đều dễ chứng minh được rằng tổng số đo hai cung nhỏ AB và MN luôn bằng $180°$, tức là $\angle MON + \angle AOB = 180°$. Gọi trung điểm AB là H ta có:

$$\angle NOJ + \angle AOH = \frac{1}{2}\angle MON + \frac{1}{2}\angle AOB = 90°$$

Mà

$\angle OAH + \angle AOH = 90° \Rightarrow \angle NOJ = \angle OAH$
$\Rightarrow \triangle NOJ = \triangle OAH$

(Hai tam giác vuông có cạnh huyền $ON = OA = R, \angle NOJ = \angle OAH$)

$$OJ = AH = \frac{AB}{2}$$

Vậy J chạy trên đường tròn tâm O bán kính $R' = \frac{AB}{2}$.

2. Kẻ đường kính $EF \perp AB$ với E, F lần lượt là các điểm chính giữa cung lớn và cung nhỏ AB. Kéo dài AM một đoạn $MD = MB$ thì $MA + MB = MA + MD = AD$.

   Vì $\triangle MAB$ có AB cố định nên chu vi $\triangle MAB$ lớn nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất.

   Vì MF là phân giác $\angle AMB$ còn $EM \perp FM$ nên đường thẳng EM chứa phân giác $\angle BMD$ (kề bù với $\angle AMB$. Vì $\triangle MBD$ cân ở M nên EM là đường trung trực của BD. Do đó

$$ED = EB = EA \Rightarrow AD \leqslant EA + ED = EA + EB$$

   dấu "=" đạt được khi và chỉ khi E thuộc đoạn AD hay $M \equiv E$.

   Vậy chu vi tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv E$ (E là trung điểm của cung lớn AB).

Bài 5.

1. Giả sử

$$\begin{cases} n + 26 = a^3 & (1) \\ n - 11 = b^3 & (2) \end{cases} \quad a, b \quad \text{là các số nguyên dương}$$

Do $n+26>n-11$ nên $a>b$. Trừ (1) cho (2) ta được

$$37=a^3-b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=37$$

Vì 37 là số nguyên tố còn hiển nhiên $0<a-b<a^2+ab+b^2$ nên ta có:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=37 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a=4, b=3$ (loại nghiệm âm). Thay vào (1) (hoặc (2)) ta được $n=38$.

Thử lại ta thấy $n=38$ thoả mãn (1), (2) với $a=4$ và $b=3$.

2. Từ điều kiện

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow x^2 \leqslant 1, y^2 \leqslant 1, z^2 \leqslant 1$$

Do đó

$$x^2(y-z)^2 \leqslant (y-z)^2 = y^2+z^2-2yz$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $y=z$ hoặc $x^2=1$

Tương tự

$$y^2(z-x)^2 \leqslant z^2+x^2-2zx$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $z=x$ hoặc $y^2=1$

$$z^2(x-y)^2 \leqslant x^2+y^2-2xy$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x=y$ hoặc $z^2=1$

Cộng ba bất đẳng thức thu được ta có:

$$\begin{aligned} & x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2 \\ & \leqslant 2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) \\ & =2-2(xy+yz+zx) \\ & P=xy+yz+zx+\frac{1}{2}[x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2] \leqslant 1 \end{aligned}$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y=z \quad \text{hoặc} \quad x^2=1 & (1) \\ z=x \quad \text{hoặc} \quad y^2=1 & (2) \\ x=y \quad \text{hoặc} \quad z^2=1 & (3) \end{cases}$$

Nhưng với $x^2 = 1$ thì do $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow y = z = 0$, do đó điều kiện (2), (3) không thể thoả mãn.

Tương tự, trường hợp $y^2 = 1$ hoặc $z^2 = 1$ cũng bị loại.

Vậy $P = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy P đạt max bằng 1, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.18 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1998 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + x^2 + x^3 + x^4 = y + y^2 + y^3 + y^4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) tương đương với $(x - y)[1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + (x^2 + y^2)(x + y)] = 0$. Do đó hệ (1) và (2) tương đương

$$\begin{cases} (x - y)[2 + 2(x + y) + xy] = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 = 1 & (4) \end{cases} \\ \begin{cases} 2 + 2(x + y) + xy = 0 & (5) \\ x^2 + y^2 = 1 & (6) \end{cases} \end{array} \right.$$

a) Giải hệ (3), (4) ta được hai nghiệm là $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Đặt $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$ thì hệ (5), (6) có dạng

$$\begin{cases} 2 + 2u + v = 0 \\ u^2 - 2v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -2u - 2 \\ u^2 + 2(2u + 2) = 1 \end{cases}$$

Giải ra ta được $\begin{cases} u = -1 \\ v = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -3 \\ v = 4 \end{cases}$

Với $u = -1, v = 0$ ta được hệ $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = -1 \\ x = -1, y = 0 \end{cases}$

Với $u = -3, v = 4$ ta được hệ $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 4 \end{cases}$ Hệ này vô nghiệm

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, -1), (-1, 0)$.

2. Xét phương trình

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = |1-a| + |1+a| \qquad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Khi đó:

$$(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leqslant 2$$

Đẳng thức có được khi $x = 0$.

$$|1-a| + |1+a| \geqslant |1-a+1+a| = 2$$

Đẳng thức có được khi $(1-a)(1+a) \geqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant a \leqslant 1$.

Do đó (1) có nghiệm khi và chỉ khi $|1-a|+|1+a| = 2 \Rightarrow -1 \leqslant a \leqslant 1$. Khi đó nghiệmc của phương trình là $x = 0$.

Chú ý: Bình phương hai vế của (1) và rút gọn ta được (1) tương đương với

$$\sqrt{1-x^2} = a^2 + |1-a^2| \qquad (2)$$

Do $\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$ dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = 0$ còn $a^2 + |1 - a^2| \geqslant |a^2 + 1 - a^2| = 1$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a^2(1-a^2) \geqslant 0 \Rightarrow a^2 \leqslant 1$.

Do đó (2) có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 \leqslant 1$ hay $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Khi đó nghiệm của (2) (hay của (1)) là: $x = 0$.

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên

$$19x^3 - 98y^2 = 1998 \qquad (1)$$

(1) tương đương với

$$19(x^3 - 100) = 98(y^2 + 1) \Rightarrow 19(x^3 - 2) = 98(y^2 + 20) \qquad (2)$$

Ta có $98(y^2 + 20)$ chia hết cho 7 (với y nguyên). Ta chứng minh $19(x^3 - 2)$ không chia hết cho 7 và như vậy (2) không có nghiệm nguyên.

Với $\forall x \in \mathbb{Z}$ ta có $x = 7k + i, k \in \mathbb{Z}$ còn i nhận các giá trị từ 0 đến 6.

$$x^3 - 2 = (7k+i)^3 - 2 = (7k)^3 + 3(7k)^2 i + 3.7ki^2 + i^3 - 2 = 7m + i^3 - 2, m \in \mathbb{Z}$$

Dễ kiểm tra được rằng: Với i nhận các giá trị từ 0 đến 6 thì $i^3 - 2$ không chia hết cho 7 suy ra $x^3 - 2$ không chia hết cho 7. Vì 19 và 7 nguyên tố cùng nhau nên $19(x^3 - 2)$ cũng không chia hết cho 7. Vậy (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 3.

1. Do $0 < a < b$ nên bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{b-a} > 3 \Rightarrow a + b + c > 3(b-a) \Rightarrow 4a + c > 2b \tag{1}$$

   Vì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm nên

$$c > \frac{b^2}{4a} \Rightarrow 4a + c > 4a + \frac{b^2}{4a} \geqslant 2\sqrt{4a.\frac{b^2}{4a}} = 2b$$

   Từ đó suy ra (1) đúng và như vậy $\frac{a+b+c}{b-a} > 3$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \\ &\geqslant \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^2 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{z^2 + x^2 + y^2} = 1 \end{aligned}$$

   Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $2yz = y^2 + z^2, 2zx = z^2 + x^2, 2xy = x^2 + y^2 \Rightarrow x = y = z$.

   Vậy P đạt min bằng 1, đạt được khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 4. Ta điền vào các ô vuông các số theo quy tắc sau:

Điền vào ô (m, n) số $f(m, n) = i$ nếu $n - m = 5k + i$ trong đó $k \in \mathbb{Z}$ còn i là một trong 5 số: $0, 1, 2, 3, 4$, tức là $n - m = i(\mod 5)$. Khi đó:

a) Trên bảng thu được, trong 5 ô liên tiếp của một hàng hay một cột đều có 5 số khác nhau là $0, 1, 2, 3, 4$.

b) Trên mỗi hàng có 2000 ô nên trên bảng thu được số ô chứa số 0 bằng số ô chứa số 1, bằng số ô chứa số 2, bằng số ô chứa số 3, bằng số ô chứa số 4.

c) Vì $q - p = (q+1) - (p+1) = (q+2) - (p+2) = (q+3) - (p+3) = (q+4) - (p+4)$, nên 5 ô tô lần thứ nhất chứa cùng một số, giả sử đó là số i. Từ lần thứ hai trở đi mỗi lần tô 5 ô chứa 5 số khác nhau và sau một lần tô bất kỳ (kể từ lần thứ hai) số ô được tô chứa số i nhiều hơn các ô được tô chứa mỗi số còn lại 5 ô. Do đó không thể sau một lần tô nào ta có thể tô được hết các ô vuông con của bảng đã cho (theo b)).

Bài 5. Gọi bán kính của các đường tròn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ là R và các tâm của chúng là O_1, O_2, O_3 tương ứng thì $O_1O_2O_3$ là tam giác đều có cạnh bằng $2R$. Gọi tâm của ε là O thì do $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R + r$ nên O là trọng tâm (trực tâm...) của $\triangle O_1O_2O_3$.

Do đó $OO_1 = \frac{2}{3}O_2O_3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{O_2O_3}{\sqrt{3}}$ hay $R + r = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}r = (3 + 2\sqrt{3})r$.

Gọi các tiếp điểm của $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ với cạnh BC là M, N tương ứng thì O_2M và O_3N vuông góc với BC và $O_2M = O_3N = R \Rightarrow O_2MNO_3$ là hình chữ nhật và $MN = O_2O_3 = 2R$.

Dễ thấy $BM = CN = R\sqrt{3}$ ($\triangle BMO_2$ và $\triangle CNO_3$ vuông góc và có $\angle O_2BM = \angle O_3CN = 30°$).

$$BC = BM + MN + NC = 2\sqrt{3}R + 2R = (2\sqrt{3}+2)(3+2\sqrt{3})r = (18+10\sqrt{3})r$$

Vậy cạnh của tam giác đều ABC là $(18 + 10\sqrt{3})r$.

2.19 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 1999 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 & (2) \end{cases}$$

Bình phương hai vế của (1) ta có

$$ab + bc + ca = -7 \tag{3}$$

Bình phương hai vế của (3) ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = 49 \to a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

Bình phương hai vế của (2) ta được

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 \to a^4 + b^4 + c^4 = 98$$

Vậy biểu thức cần tính

$$P = 1 + a^4 + b^4 + c^4 = 99$$

Bài 2.

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$
   Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 7 & (1) \\ \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x} & (2) \end{cases}$$

   Phương trình (2) tương đương với

$$\begin{aligned} & x+3 = x-1+2\sqrt{-2x^2+22x-56} \\ \rightarrow & 2 = \sqrt{-2x^2+22x-56} \\ \rightarrow & 4 = -2x^2+22x-56 \\ \rightarrow & x^2-11x+30=0 \\ \rightarrow & x_1 = 5, \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

   Cả hai nghiệm đều thoả mãn (1). Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

2. Hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)=\frac{9}{2} \\ \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=\frac{9}{2} \end{cases}$$

   Đặt $x+\frac{1}{y} = u$ và $y+\frac{1}{x} = v$ ta có:

$$\begin{cases} u+v = \frac{9}{2} \\ uv = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} u = \frac{3}{2} \\ v = 3 \end{cases}$$

   Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm là

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Ta có

$$\frac{n^2+9n-2}{n+11} = n-2+\frac{20}{n+11}$$

muốn $n^2+9n-2 \vdots n+11$ thì $n+11$ phải là ước số của 20 suy ra $n=9$ là duy nhất

Bài 4. 1) và 2) Gọi trung điểm của OI là O' thì $O'E'$là đường trung bình của tam giác IOE do đó $O'E' = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2}R$ (R là bán kính của đường tròn ($\mathcal{C}$).

Tương tự: $O'F' = O'M' = O'N' = \frac{R}{2}$.

Vậy $M'E'N'F'$ luôn là tứ giác nội tiếp đường tròn có bán kính $R' = \frac{R}{2}$.

3) Nếu $MN'\perp EF$ thì $S' = S_{M'E'N'F'} = \frac{1}{2}M'N'.E'F' = \frac{1}{8}MN.EF'$

Hạ $OK\perp MN, OH\perp EF$ ta có

$$\begin{aligned}
&MN^2 + EF^2 = 4MK^2 + 4EH^2\\
&= 4(R^2 - OK^2) + 4(R^2 - OH^2) = 8R^2 - 4(OK^2 + OH^2)\\
&= 8R^2 - 4OI^2
\end{aligned}$$

không đổi (vì I cố định). Do đó

$$S' = \frac{1}{8}MN.EF \leq \frac{1}{16}(MN^2 + EF^2) = \frac{1}{4}(2R^2 - OI^2)$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $MN = EF$ hay $OK = OH$ hay hình chữ nhật $OKIH$ là hình vuông khi và chỉ khi MN và EF lập với OI các góc bằng 45°.

Vậy $S' = S_{M'N'E'F'}$ đạt max bằng $\frac{1}{4}(2R^2 - OI^2)$, đạt được khi và chỉ khi MN và EF lập với OI các góc bằng 45°.

Bài 5. Từ giả thiết $x > 0, y > 0, x + y = 1$ ta có

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow x^2y^2 \leq \frac{1}{16}$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Ta có: $P = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2$

Cách 1: Trước hết chú ý rằng nếu $a \geq b \geq 1$ thì $a + \frac{1}{a} \geq b + \frac{1}{b}$. Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b$.

Thật vậy:

$$S = \left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(b + \frac{1}{b}\right) = (a - b)\left(\frac{ab - 1}{ab}\right) \geq 0$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b$.

Coi $a = \frac{1}{x^2y^2} \geq b = 16$ ta có

$$P = \frac{1}{x^2y^2} + x^2y^2 + 2 \geq 16 + \frac{1}{16} + 2 = \frac{289}{16}$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $\frac{1}{x^2y^2} = 16$ hay $xy = \frac{1}{4}$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy P đạt min bằng $\frac{289}{16}$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$

Cách 2:

$$P = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2 = 16^2x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2 - 255x^2y^2$$

mà $16^2x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq 32$, dấu "=" đạt được khi $16xy = \frac{1}{xy}$ hay $xy = \frac{1}{4}$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

Còn do $x^2y^2 \leq \frac{1}{16}$ nên $-255x^2y^2 \geq -\frac{255}{16}$, dấu "=" đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy $P \geq 32 + 2 - \frac{255}{16} = \frac{289}{16}$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$ suy ra P đạt min bằng $\frac{289}{16}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$

2.20 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2000 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1) Ta có

$$S = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{1999} - \frac{1}{2000})$$
$$\Leftrightarrow \quad S = 1 - \frac{1}{2000} = \frac{1999}{2000}$$

2) Đặt $u = x + \frac{1}{y}, \quad v = \frac{x}{y}$ ta có

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{2x}{y} = u^2 - 2v$$

Thay vào hệ đã cho ta nhận được:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 - v = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^2 + u - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = 2, \quad v = 1 \\ u = -3, \quad v = 6 \end{array} \right.$$

a) Giải

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ x = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

b) Giải

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = -3 \\ \frac{x}{y} = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6y + \frac{1}{y} = -3 \\ x = 6y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Vô nghiệm}$$

Đáp số:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài 2.
1) Viết lại phương trình dưới dạng

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 + \sqrt{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} \qquad (1)$$

Điều kiện: $x \geqslant 1$ ta có

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x^3+x^2+x+1}-1) = 0$$

a) Giải $\sqrt{x-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$
b) Giải $\sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ (loại)
Đáp số: $x = 2$
2) *Cách giải thứ nhất:* Phương trình đã cho viết lại như sau:

$$x^2 - 4ax + 4a^2 = -x^2 + \frac{11}{2}x - 7 = (2-x)(x-\frac{7}{2})$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-2a)^2 = (2-x)(x-\frac{7}{2})$$
$$\text{suy ra} \quad (2-x)(x-\frac{7}{2}) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$$

$$2 \leqslant x_0 \leqslant \frac{7}{2}$$

Vậy chỉ có thể $x_0 = 2, x_0 = 3$. Thay vào phương trình ta nhận được:
a) $(2-2a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$
Thử lại với $a = 1$ ta có phương trình

$$2x^2 - \frac{19}{2}x + 11 = 0$$

Phương trình này có nghiệm nguyên $x = 2$.
b) $(3-2a)^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow a = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$
Thử lại với $a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ta có phương trình

$$2x^2 - \left(\frac{23}{2} + \sqrt{2}\right)x + \frac{33}{2} + 3\sqrt{2} = 0$$

có nghiệm nguyên $x = 3$.
Với $a = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$ thu được phương trình

$$2x^2 - \left(\frac{23}{2} - \sqrt{2}\right)x + \frac{33}{2} - 3\sqrt{2} = 0$$

có nghiệm nguyên $x = 3$

Vậy $a = 1, a = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ là các giá trị của a cần tìm.

Cách thứ 2: Phương trình được viết dưới dạng

$$4a^2 - 4xa + 2x^2 - \frac{11x}{2} + 7 = 0$$

Suy ra

$$\triangle' = -4x^2 + 22x - 28 \geqslant 0 \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$$

Vậy nghiệm nguyên x_0 chỉ có thể nhận các giá trị $x_0 = 2, x_0 = 3$. Thay vào phương trình ta nhận được

$$a = 1, a = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Bài 3.

1) Đường tròn tiếp xúc với AD tại P và BC tại Q. Vì $AB//DC \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^0$

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AOD} &= 180^0 - (\widehat{OAD} + \widehat{ODA}) \\ &= 180^0 - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle AOD$ vuông tại O.

Tương tự $\triangle BOC$ vuông tại O.

Xét hai tam giác vuông AOD và BOC ta có:

$$PA.PD = r^2 = QB.QC$$

Vì $AE = PA, DF = PD, BE = QB, CF = QC$ ta suy ra:

$$AE.DF = BE.CF \quad \Rightarrow \quad \frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF} \quad \text{(đpcm)}$$

2) Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{r}{2}(AB + AD + DC + BC)$$

Vì $AB + AD = DC + BC \Rightarrow S = r(AB + CD)$

Từ tính chất

$$\begin{aligned}\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF} \Rightarrow \quad CF &= \frac{1}{3}.CD = CQ \\ BQ = EB &= \frac{2a}{3}\end{aligned}$$

Ta suy ra: $b = \frac{1}{3}CD + \frac{2a}{3} \Rightarrow CD = 3b - 2a$

$$\Rightarrow AB + CD = 3b - a \Rightarrow S_{ABCD} = r(3b - a)$$

Ta có

$$t^2 = BQ.CQ = \frac{2a}{3}.\frac{3b-2a}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2a(3b-2a)}}{3}$$

Suy ra

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2a(3b-2a)}}{3}.(3b-a)$$

Bài 4. *Cách 1:* Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$M = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^4+y^4}{x^2y^2} \geqslant 3$$

$$M = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{2x^2y^2} = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{2x^2y^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{2x^2y^2}$$

$$M \geqslant 2 + \frac{x^2+y^2)^2}{2x^2y^2} \geqslant 2 + 1 = 3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Cách 2: Bất đẳng thức được viết lại:

$$N = 4\frac{x^2}{x^2+y^2}.\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{x^2} + \frac{x^2+y^2}{y^2} \geqslant 5$$

Đặt $a = \frac{x^2}{x^2+y^2}, b = \frac{y^2}{x^2+y^2}$, ta có $a, b > 0, a + b = 1$

Từ đó

$$n = 4ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 8ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 4ab$$

$$N \geqslant 3\sqrt[3]{8} - 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 5$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow x = y$.

2.21 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2000 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

1.
$$y(x-1) = x^2 + 2 \tag{1}$$

Dễ thấy $x = 1$ không thể thoả mãn (1), do đó (1) tương đương với

$$y = \frac{x^2+2}{x-1} \Rightarrow y = x + 1 + \frac{3}{x-1} \tag{2}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \mathbb{Z}$ suy ra $\frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}$ hay $z - 1$ là một trong các số: $\pm 1, \pm 3$

$$\begin{aligned} x-1 = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 6 \\ x-1 = -1 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -2 \\ x-1 = 3 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 6 \\ x-1 = -3 \rightarrow x = -2 \rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có bốn nghiệm nguyên (x, y) là $(2; 6), (0; -2), (4; 6), (-2; -2)$

2.

$$\begin{aligned} -1 \le x + y &\le 1 && (1) \\ -1 \le xy + x + y &\le 1 && (2) \end{aligned}$$

Ta chứng minh $|x| \le 2$.

Giả sử ngược lại $|x| > 2$ khi đó có hai khả năng

(a) $x > 2$. Từ (1) ta có $y \le 1 - x < -1$ suy ra $xy < -2$

(b) $x < -2$. Từ (1) ta có $y \ge -1 - x > 1$ suy ra $xy < -2$

Vậy nếu $|x| > 2$ thì $xy < -2$ và do $x+y \le 1$ nên ta có $xy+x+y < -1$ trái với (2) nên giả thiết $|x| > 2$ là sai suy ra $|x| \le 2$. Lý luận tương tự ta có $|y| \le 2$

Bài 2.

1. Phương trình đã cho viết lại dưới dạng

$$\frac{4}{x} - x + \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{2x - \frac{5}{x}} = 0 \tag{1}$$

Đặt $u = \sqrt{x - \frac{1}{x}}, v = \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$ thì $u, v \ge 0$ và $u^2 - v^2 = \frac{4}{x} - x$. Do đó (1) có dạng

$$u^2 - v^2 + u - v = 0 \Rightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Rightarrow u = v \quad (\text{vì} \quad u, v \ge 0)$$

Từ đó ta có

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{2x-\frac{5}{x}} \Rightarrow x-\frac{1}{x}=2x-\frac{5}{x}\geq 0 \qquad (2)$$

Phương trình $x-\frac{1}{x}=2x-\frac{5}{x}$ có nghiệm là $x=\pm 2$.

Từ (2) suy ra chỉ có $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. $f(x)=ax^2+bx+c$. Gọi tập số hữu tỷ là $\mathbb{Q}$ ta có

$$f(1)=a+b+c\in\mathbb{Q} \qquad (1)$$
$$f(4)=16a+4b+c\in\mathbb{Q} \qquad (2)$$
$$f(9)=81a+9b+c\in\mathbb{Q} \qquad (3)$$

Trừ (2) cho (1) ta có

$$15a+3b\in\mathbb{Q}\Rightarrow 5a+b\in\mathbb{Q} \qquad (4)$$

Trừ (3) cho (2) ta có

$$65a-5b\in\mathbb{Q}\Rightarrow 13a-b\in\mathbb{Q} \qquad (5)$$

Cộng (4) và (5) ta được $18a\in\mathbb{Q}\Rightarrow a\in\mathbb{Q}$. Từ (3) suy ra $b\in\mathbb{Q}$ và từ (1) ta có $c\in\mathbb{Q}$. Vậy $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Bài 3.

1. Vẽ vòng tròn (O) đường kính AC. Do $\widehat{B}\geq 90^\circ, \widehat{D}\geq 90^\circ$ nên B và D nằm bên trong hoặc trên (O). Kéo dài BD cắt (O) tại M,N thì $BD\leq MN\leq AC$

2. Vì A,B,C là ba đỉnh của một tam giác nên B không thuộc đường thẳng AC. Theo giả thiết $\triangle ABC$ phải thoả mãn đồng thời bốn điều kiện sau:

$$\begin{cases}\widehat{A}\leq\widehat{B}\\ \widehat{A}\leq\widehat{C}\\ \widehat{B}\leq 90^\circ\\ \widehat{C}\leq 90^\circ\end{cases}$$

Ta lần lượt tìn tập hợp các điểm B thoả mãn mỗi điều kiện trên

a) $\widehat{A}\leq\widehat{B}$ suy ra $BC<AC$ hay B nằm bên trong hoặc trên đường tròn (C) tâm C, bán kính CA.

b) $\widehat{A} \leq \widehat{B}$ suy ra $BC < BA$ hay B thuộc nửa mặt phẳng chứa C có bờ là đường trung trực $\triangle$ của AC (B có thể thuộc $\triangle$).

c) $\widehat{B} \leq 90°$ hay B nằm bên ngoài hoặc trên đường tròn (O) đường kính AC.

d) $\widehat{C} \leq 90°$ hay B thuộc nửa mặt phẳng chứa A, có bờ là đường thẳng d đi qua C, vuông góc với AC (B có thể thuộc d nhưng $B \neq C$).

Vậy tập hợp các điểm B thoả mãn giả thiết bài toán là phần không bị gạch trên hình vẽ (kể cả biên trừ điểm C).

Bài 4. Gọi 6 điểm đã cho là A, B, C, D, E, F. Ta tô màu các đoạn thẳng nối các cặp điểm trong chúng như sau:

Trong mỗi tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho, ta tô cạnh bé nhất của nó màu đỏ. Sau khi đã tô hết các cạnh như vậy bằng màu đỏ, các đoạn thẳng còn lại ta tô màu xanh (như vậy đoạn được tô xanh không phải là cạnh bé nhất của một tam giác nào cả). Ta chứng minh tồn tại 3 điểm trong 6 điểm đã cho mà tam giác tạo bởi ba điểm đó có ba cạnh cùng màu.

Thật vậy, vì 5 đoạn AB, AC, AD, AE, AF được tô bởi hai màu xanh, đỏ nên trong chúng phải có 3 đoạn cùng màu. Không mất tổng quát giả sử đó là AB, AC, AD. Khi đó nếu một trong 3 đoạn BC, CD, DB, chẳng hạn BC, cùng màu với các đoạn AB, AC, AD, thì $\triangle ABC$ có ba cạnh cùng màu. Còn nếu cả ba đoạn BC, CD, DB đều khác màu với các đoạn AB, AC, AD thì chúng cùng màu với nhau. Suy ra $\triangle BCD$ có ba cạnh cùng màu.

Vậy luôn có ba điểm trong 6 điểm đã cho có tạo thành tam giác có ba cạnh cùng màu.

Giả sử $\triangle ABC$ có ba cạnh cùng màu. Khi đó do cạnh bé nhất của nó có màu đỏ nên cả ba cạnh cùng màu đỏ. Do cạnh lớn nhất của $\triangle ABC$ có màu đỏ nên nó cũng là cạnh bé nhất của một tam giác khác.

2.22 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2001 (cho mọi thí sinh)

Bài 1. Ta có

$$x^2 = \frac{y^2 - 1}{y + 2} \qquad (y \neq 2)$$

($y = -2$ không phải là nghiệm)

$$x^2 = y - 2 + \frac{3}{y+2} \Rightarrow y - 2 + \frac{3}{y+2} \in \mathbb{Z}$$

Vậy $y + 2 = \pm 1; \qquad y + 2 = \pm 3$

- $y+2=1 \to y=-1 \to x^2=0 \to x=0$ ta có nghiệm $(x=0, y=-1)$
- $y+2=-1 \to y=-3 \to x^2=-8$ (loại)
- $y+2=3 \to y=1 \to x^2=0 \to x=0$ ta có nghiệm $(x=0, y=1)$
- $y+2=-3 \to y=-5 \to x=-8$ (loại)

Đáp số: $(x=0, y=1); (x=0, y=-1)$
Bài 2. 1) Điều kiện để phương trình có nghĩa

$$\begin{cases} x \leqslant -\frac{1}{3} & \text{và} \quad x \geqslant 0 \\ x \leqslant 0 & \text{và} \quad x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\frac{1}{3} \\ x \geqslant 1 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Ta có $x=0$ là nghiệm.
Chia hai vế cho $\sqrt{x^2} \neq 0$ ta thu được

$$\sqrt{3+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 2$$

Đặt $u = \sqrt{3+\frac{1}{x}} \geqslant 0, v = \sqrt{1-\frac{1}{x}} \geqslant 0$ ta thu được

$$\begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases}$$

Ta có $u = 2+v$ suy ra $(2+v)^2 + v^2 = 4 \leftrightarrow 2v^2 + 4v = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} v = 0 & \\ v = -2 & \text{(loại)} \end{array} \right. \leftrightarrow v = \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 0 \leftrightarrow x = 1$$

Đáp số: $x=0$ hoăc $x=1$
2) Hệ phương trình được viết lại:

$$\begin{cases} y(x-1) + x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+x-2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} & (II) \end{array} \right.$$

Giải (I)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Giải (II) thu được

$$x^2 + (2-x)^2 = 2 \leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \leftrightarrow x = 1 \quad \text{và} \quad y = 1$$

Đáp số: $(x = 1, y = 1)$; $(x = 1, y = -1)$

Bài 3. a) Ta có

$$OH = \frac{1}{2}OM = \frac{a}{4} \Rightarrow \quad MH = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$FH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Suy ra

$$MF = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4}.a$$

$$FF' = \frac{1}{2}MF = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{8}.a$$

$$EM = ME_1 = HE_1 - MH = FH - MH = FH - MH$$

$$\Rightarrow \quad EM = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4}.a$$

Suy ra

$$EE' = \frac{1}{2}EM = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}.a$$

Ta có tổng hai đáy hình thang $EE' + FF' = \frac{\sqrt{15}}{4}.a$

Ta có

$$ME' = EM.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4}.a$$

$$MF' = FM.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4}.a$$

Vậy đường cao hình thang vuông là:

$$h = ME' + MF' = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{15}}{2}.a = \frac{\sqrt{45}}{4}.a$$

Diện tích hình thang vuông là:

$$S = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{15}}{4}.a.\frac{\sqrt{45}}{4}.a = \frac{15\sqrt{3}}{32}.a^2$$

Suy ra EF tiếp xúc với vòng tròn tâm O bán kính $\frac{a}{2}$.
Bài 4. Nhân hai vế của phương trình (1) với xyz ta thu được

$$\begin{aligned}
& 2xyz + x^2z + x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (xyz + x^2z) + (xyz + y^2z) + (x^2y + y^2x) + z^2(y + x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & xz(y + x) + yz(x + y) + yx(x + y) + z^2(y + x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x + y)(xz + yz + yx + z^2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x + y)(y + z)(z + x) = 0
\end{aligned}$$

Không mất tổng quát giả sử:

$$x + y = 0 \to \quad x^3 + y^3 = 0 \to \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$$

Suy ra: $z^3 = 1 \to \quad z = 1 \to \quad \frac{1}{z} = 1$
Vậy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Bài 5. Ta có

$$M \leqslant \frac{xyz}{2\sqrt{xy}2\sqrt{yz}2\sqrt{zx}} = \frac{1}{8}$$

Vậy $M_{\max} = \frac{1}{8}$ khi $x = y = z$.

2.23 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2001 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1. Từ giả thiết ta có $c = f(0) \in \mathbb{Z}$, còn a, b không nhất thiết phải nguyên, chẳng hạn với $a = b = \frac{1}{2}, c \in \mathbb{Z}$ ta có

   $$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c = \frac{x(x+1)}{2} + c \in \mathbb{Z}$$

   với mọi $x \in \mathbb{Z}$

2. Giả sử (x, y) là nghiệm không âm của phương trình $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$. Khi đó

   $$x^2 > y^2 \tag{1}$$

   Mặt khác do $y \geq 0$ nên

   $$y + 1 \leq 4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2$$

hay

$$\sqrt{y+1} \leq 2y+1 \Rightarrow y^2 + \sqrt{y+1} \leq y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \qquad (2)$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $y = 0$. Từ (1) và (2) suy ra

$$y^2 < x^2 = y^2 + \sqrt{y+1} \leq (y+1)^2 \Rightarrow x^2 = (y+1)^2$$

(vì y^2 và $(y+1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp) ta có:

$$y^2 + \sqrt{y+1} = (y+1)^2 \Rightarrow y = 0$$

Với $y = 0$ ta được nghiệm là $x = 1, y = 0$.

Vậy phương trình đã cho có đúng một nghiệm nguyên là $x = 1, y = 0$

Bài 2.

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 \\ \Rightarrow\ & (x^2 - 6x + 9) + (x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4) = 0 \\ \Rightarrow\ & (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Bài 3.

$$\begin{cases} ax + by = 3 & (1) \\ ax^2 + by^2 = 5 & (2) \\ ax^3 + by^3 = 9 & (3) \\ ax^4 + by^4 = 17 & (4) \end{cases}$$

Nhân (2) với $x + y$ ta có $ax^3 + by^3 + xy(ax + by) = 5(x + y)$.

Từ đây và (1), (3) ta có

$$9 + 3xy = 5(x + y) \qquad (5)$$

Nhân (3) với $x + y$ ta có $ax^4 + by^4 + xy(ax^2 + by^2) = 9(x + y)$.

Từ đây và (2), (4) ta có

$$17 + 5xy = 9(x + y) \qquad (6)$$

Vậy x, y thoả mãn hệ

$$\begin{cases} 9 + 3xy = 5(x + y) \\ 17 + 5xy = 9(x + y) \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1, & y=2 \\ x=2, & y=1 \end{array}\right.$$

Với $x=1, y=2$ hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ a+4b=5 \\ a+8b=9 \\ a+16b=17 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$$

Trường hợp $x=2, y=1$, tương tự ta cũng thu được $a=b=1$.
Vậy $S_n = ax^n + by^n = 1 + 2^n$ do đó

$$\begin{aligned} A &= ax^5 + by^5 = 1 + 2^5 = 33 \\ B &= ax^{2001} + by^{2001} = 1 + 2^{2001} \end{aligned}$$

Bài 4 Kéo dài MO cắt d_2 tại P thì $\triangle OAM = \triangle OBP$ suy ra hai đường cao tương ứng của chúng bằng nhau, tức là $OH = OB = OA$. Vậy đường tròn (O) đường kính AB tiếp xúc với MN tại H (và tiếp xúc d_1, d_2 tại A, B). Do đó

$$\begin{aligned} &AM = HM, \quad BN = HN \\ \Rightarrow &\frac{MH}{HN} = \frac{MA}{NB} = \frac{MI}{IB} \Rightarrow HI//BN \end{aligned}$$

hay đường thẳng $(HIK)//d_2$ và d_1 suy ra $(HIK)\perp AB$ và $\widehat{HKB} = \widehat{MEB} = \widehat{NHB}$ (vì $EMHB$ là tứ giác nội tiếp). Mà

$$\widehat{NHB} = \widehat{NBH} = \widehat{KHB} \Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{KHB}$$

hay $\triangle BHK$ cân ở B nên AB là đường trung trực của $HK (AB \perp HK)$ suy ra $OK = OH = \frac{AB}{2}$ hay K luôn chạy trên đường tròn (O) đường kính AB.

Bài 5. Nhận xét: Nếu đồng tiền được đổi mặt một số lẻ lần thì mặt đỏ ngửa lên phía trên.

Đánh số các đồng tiền theo chiều kim đồng hồ lần lượt là $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$.

Cách 1: Ta đổi mặt theo thứ tự sau (mỗi lần 5 đồng tiền viết trên một dòng).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & & & & & & & & & & \\
 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & & & & & & & & & \\
 & & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & & & & & & & & \\
 & & & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & & & & & & \\
 & & & & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & & & & & & \\
 & & & & & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & & & & & \\
 & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\
 & & & & & & a_{1997} & a_{1998} & a_{1999} & a_{2000} & a_{2001} & & & & \\
 & & & & & & & a_{1998} & a_{1999} & a_{2000} & a_{2001} & a_1 & & & \\
 & & & & & & & & a_{1999} & a_{2000} & a_{2001} & a_1 & a_2 & & \\
 & & & & & & & & & a_{2000} & a_{2001} & a_1 & a_2 & a_3 & \\
 & & & & & & & & & & a_{2001} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4
\end{array}
$$

Qua lược đồ trên ta thấy sau 2001 lần đổi mặt, mỗi đồng tiền đều được đổi mặt 5 lần, do đó tất cả các mặt đỏ đều ngửa lên phía trên

Cách 2: Lần lượt đổi mặt các đồng tiền theo chiều kim đồng hồ như sau:

Lần 1: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Lần 2: $a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

Lần 3: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$

Lần 2001: $a_{1997}, a_{1998}, a_{1999}, a_{2000}, a_{2001}$

Như thế sau 2001 lần đổi mặt thì mỗi đồng tiền được đổi mặt đúng 5 lần. Do đó tất cả các mặt đỏ đều ngửa lên phía trên.

2.24 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2002 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1) Điều kiện: $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{8+t} + \sqrt{5-t} = 5 \quad (\sqrt{x} = t) \\
\Leftrightarrow \quad & 13 + 2\sqrt{(8+t)(5-t)} = 25 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{40 - 3t - t^2} = 6 \\
\Leftrightarrow \quad & t^2 + 3t - 4 = 0 \\
& t_1 = 1 \Rightarrow x = 1 \\
& t_2 = -4 \quad \text{loại}
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$

Cách khác
Đặt $\sqrt{8+\sqrt{x}}=u, \sqrt{5-\sqrt{x}}=v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=13 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Đáp số.}$$

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+x+y+xy=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=7 \\ (x+y)^2-xy+x+y=17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S+P=7 & (1) \\ S^2+S-P=17 & (2) \end{cases}$$

với $x+y=S, xy=P$.
Từ (1) và (2)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad S^2+2S-24=0 \\ &\Rightarrow \quad S_1=4, S_2=-6 \end{aligned}$$

Với

$$\begin{cases} S=4 \\ P=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Với

$$\begin{cases} S=-6 \\ P=13 \end{cases} \quad \text{hệ này vô nghiệm}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x,y)=\left[\begin{matrix}(1;3) \\ (3;1)\end{matrix}\right.$

Bài 2.

$$\begin{aligned} \triangle &= (a+b+c)^2-4(ab+bc+ca) \\ \triangle &= a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca \end{aligned}$$

Từ $\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(a+b)>c^2 \\ a(b+c)>a^2 \\ b(c+a)>b^2 \end{cases} \Rightarrow 2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2 \Rightarrow \triangle<0$

Cách khác:

$$\begin{aligned} \triangle &= a^2+b^2+c^2-ab-ab-bc-bc-ca-ca \\ \triangle &= a(a-b-c)+b(b-c-a)+c(c-a-b)<0 \end{aligned}$$

Bài 3. Giả sử $n^2 + 2002$ là số chính phương

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad n^2 + 2002 = m^2 \quad (m \quad \text{nguyên}) \\ &\Rightarrow \quad m^2 - n^2 = 2002 \\ &\Rightarrow \quad (m-n)(m+n) = 2002 \qquad (*) \end{aligned}$$

Chú ý rằng m và n phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ

$$\Rightarrow \quad (m-n)\vdots 2 \quad \text{và} \quad (m+n)\vdots 2$$

Suy ra đẳng thức (*) không thể xảy ra vì vế trái chia hết cho 4 nhưng vế phải không chia hết cho 4.

Vậy không có số nguyên n nào để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Bài 4.

Trước hết chú ý rằng với $a, b, c > 0$ ta luôn có: $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geqslant 9$, gấu "=" đạt được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với $(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}) \geqslant 6$ hiển nhiên đúng do $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$ với $x, y > 0$, dấu "=" đạt được khi $x = y$.

Áp dụng với $1 + xy = a$, $1 + yz = b$, $1 + zx = c$

Ta có: $(3 + xy + yz + zx).P \geqslant 9$. Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $1 + xy = 1 + yz = 1 + zx$ hay $x = y = z$

$$\Rightarrow P \geqslant \frac{9}{3 + xy + yz + zx} \geqslant \frac{1}{3 + x^2 + y^2 + z^2} \geqslant \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{3}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 5. Từ giả thiết ta suy ra $\widehat{MAN} = 45^0$

1) Tứ giác $ADNQ$ có $\widehat{QDN} = \widehat{QAN} = 45^0$. Suy ra tứ giác $ADNQ$ là tứ giác nội tiếp.

Trong tứ giác nội tiếp $ADNQ$ có $\widehat{AND} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NQA} = 90^0$ suy ra điểm Q nhìn đoạn MN dưới một góc vuông.

Hoàn toàn tương tự, tứ giác $ABMP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPA} = 90^0$ suy ra điểm P nhìn đoạn MN dưới một góc vuông. Vậy năm điểm P, Q, M, C, N nằm trên đường tròn đường kính MN.

2) Trên cạnh CB kéo dài về phía B lấy điểm K sao cho $BK = DN$.

Dễ thấy góc $\widehat{MAK} = 45^0 \Rightarrow \triangle AMN = \triangle AMK$ do cạnh AM chung, $AN = AK$ và $\widehat{MAN} = \widehat{MAK} = 45^0$, suy ra đường cao AH của $\triangle AMN$ phải bằng đường cao AB của $\triangle AMK$.

Như vậy, khoảng cách từ A đến MN bằng độ dài đoạn AB nên đường tròn tâm A bán kính AB tiếp xúc với MN.

3) (Xem hình 1)

Do $\triangle AQN$ và $\triangle APM$ vuông tại Q và P nên:

$$\begin{aligned}
& \frac{AQ}{AN} = \frac{AP}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Rightarrow \quad & \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{AQ.AP}{AN.AM} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad & S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2}.S_{\triangle AMN} \\
\Rightarrow \quad & S_{\triangle APQ} = S_{MNPQ} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 1 \quad \text{không đổi.}
\end{aligned}$$

2.25 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2002 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1. 1) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x-2}(\sqrt{x-1}-1) - \sqrt{x+3}(\sqrt{x-1}-1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}) = 0 \\
a) \quad & \sqrt{x-1}-1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \\
b) \quad & \sqrt{x-2}-\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3} \quad \text{vô nghiệm.}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 2$

2) Phương trình đã cho có dạng: $(x+1)(y+1) = 10$

Vậy có hai khả năng sau đây:

$$a) \begin{cases} x+1 = 1 \\ y+1 = 10 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+1 = 10 \\ y+1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{có hai nghiệm} \quad (0,9),(9,0)$$

$$b) \begin{cases} x+1 = -1 \\ y+1 = -10 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+1 = -10 \\ y+1 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{có hai nghiệm} \ (-2,-11),(-11,-2)$$

Tương tự cho các trường hợp:

$$\begin{cases} x+1 = 2 \\ y+1 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+1 = 5 \\ y+1 = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+1 = -2 \\ y+1 = -5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+1 = -5 \\ y+1 = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ có thêm bốn nghiệm nữa là: $(1,4),(4,1),(-3,-6),(-6,-3)$

Bài 2. Do $x^2+y^2+xy=1$ nên phương trình thứ hai của hệ có dạng:

$$\begin{aligned} & x^3+y^3=(x+3y)(x^2+y^2+xy)\\ \Leftrightarrow\quad & x^3+y^3=x^3+xy^2+x^2y+3x^2y+3y^3+3xy^2\\ \Leftrightarrow\quad & 2y^3+4xy^2+4x^2y=0\\ \Leftrightarrow\quad & 2y(y^2+2xy+2x^2)=0\end{aligned}$$

$a)\quad y=0\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow$ hệ có hai nghiệm $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$

$b)\quad y^2+2xy+2x^2=0\Leftrightarrow(x+y)^2+x^2=0$

Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=0$ nên trong trường hợp này hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $x=1,y=0$ và $x=-1,y=0$

Bài 3. Mười số đã cho viết thành một hàng là: $a_1,a_2,\dots,a_{10}$

Xét mười tổng: $a_1+1,a_2+2,\dots a_{10}+10$ Khi đó:

$$\begin{aligned}S&=(a_1+1)+(a_2+2)+\cdots+(a_{10}+10)\\ S&=(1+2+\cdots+10)+(1+2+\cdots+10)=110\end{aligned}$$

Chú ý rằng tổng S có tận cùng bằng 0.

Giả sử rằng 10 tổng trên không có hai tổng nào có tận cùng giống nhau. Khi đó chữ số tận cùng của chúng là: $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Do $0+1+2+\cdots+9=45$ nên chữ số tận cùng của tổng $S=(a_1+1)+\cdots+(a_{10}+10)$ là 5 $\Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 4.

$$\begin{aligned}2P&=\frac{8a}{b+c-a}+\frac{18b}{a+c-b}+\frac{32c}{a+b-c}\\ &=4\Big(\frac{a+b+c}{b+c-a}-1\Big)+9\Big(\frac{a+b+c}{a+c-b}-1\Big)+16\Big(\frac{a+b+c}{a+b-c}-1\Big)\\ &=(a+b+c)\Big(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{a+c-b}+\frac{16}{a+b-c}\Big)-29\end{aligned}$$

Chú ý rằng:

$$\Big(\frac{2}{\sqrt{b+c-a}}\sqrt{b+c-a}+\frac{3}{\sqrt{a+c-b}}\sqrt{a+c-b}+\\ +\frac{4}{\sqrt{a+b-c}}\sqrt{a+b-c}\Big)=2+3+4=9$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$
\begin{aligned}
9^2 &= \Big(\frac{2}{\sqrt{b+c-a}}\sqrt{b+c-a} + \frac{3}{\sqrt{a+c-b}}\sqrt{a+c-b} + \frac{4}{\sqrt{a+b-c}} \\
&\qquad \sqrt{a+b-c}\Big)^2 \\
&\leqslant \Big(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c}\Big)[(b+c-a)+(a+c-b)+ \\
&\qquad +(a+b-c)] \\
&= \Big(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c}\Big)(a+b+c)
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra $2P \geqslant 81 - 29 = 52 \Rightarrow P \geqslant 26$.
Dấu bằng đạt được khi:

$$\frac{2}{b+c-a} = \frac{3}{a+c-b} = \frac{4}{a+b-c} = \frac{1}{k} \quad (\text{với} \quad k > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} b+c-a = 2k \\ a+c-b = 3k \\ a+b-c = 4k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{7k}{2} \\ b = 3k \\ a = \frac{5k}{2} \end{cases}$$

Cụ thể hơn, có thể chon: $a = 7, b = 6, c = 5$.
Chú ý: Có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
Cách giải khác:

$$\text{Đặt} \quad \begin{cases} b+c-a = 2x \\ c+a-b = 2y \\ a+b-c = 2z \end{cases} \quad \text{thì} \quad x, y, z > 0 \quad \text{và} \quad \begin{cases} a = y+z \\ b = z+x \\ c = x+y \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 2P &= 4\Big(\frac{y+z}{x}\Big) + 9\Big(\frac{z+x}{y}\Big) + 16\Big(\frac{x+y}{z}\Big) \\
&= \Big(4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y}\Big) + \Big(4\frac{z}{x} + 16\frac{x}{z}\Big) + \Big(9\frac{z}{y} + 16\frac{y}{z}\Big)
\end{aligned}
$$

Đặt

$$A = \Big(4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y}\Big); B = \Big(4\frac{z}{x} + 16\frac{x}{z}\Big); C = \Big(9\frac{z}{y} + 16\frac{y}{z}\Big)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\alpha + \beta \geqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$ với $\alpha, \beta > 0$.

Ta có $A \geqslant 12, B \geqslant 16, C \geqslant 24 \Rightarrow 2P \geqslant 12 + 16 + 24 = 52 \Rightarrow P \geqslant 26$

$$\text{Dấu bằng đạt được khi:} \quad \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ \frac{z}{x} = 2 \\ \frac{z}{y} = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x; z = 2x$$

Chẳng hạn lấy $x = 2 \Rightarrow y = 3, z = 4 \Rightarrow a = 7, b = 6, c = 5$

Tóm lại $P_{\min} = 26$.

Bài 5.

1) Tam giác vuông $AIB' =$ tam giác vuông AIC' (vì AI chung và $IB' = IC'$) $\Rightarrow \widehat{AIB'} = \widehat{AIC'} \Rightarrow$ sđ $MB' =$ sđ MC'.

Trong $\triangle A'B'C'$ $A'M$ là đường phân giác trong của $\widehat{B'A'C'}$.

Tương tự $B'N, C'P$ là các đường phân giác trong của $\triangle A'B'C'$ suy ra ba đường $A'M, B'N, C'P$ đồng quy.

2) Trong $\triangle BID$ có: $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Mặt khác, $\widehat{DIB}$ là góc ngoài của $\triangle IAB$ nên $\widehat{DIB} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$.

Vậy $\triangle BID$ cân tại D. Hạ $DE \perp BI$ và $IQ \perp BC$.

Do $\widehat{IDE} = \widehat{ICQ} = \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow$ tam giác vuông IDE đồng dạng với tam giác vuông ICQ. Suy ra

$$\frac{ID}{IC} = \frac{IE}{IQ} = \frac{2IE}{2IQ} = \frac{IB}{2IQ} \Rightarrow \frac{IB.IC}{ID} = 2.IQ = 2r \quad \text{(đpcm)}$$

Cách giải khác: Như lý luận ở cách giải trên, các $\triangle DBI, \triangle DCI$ đều là tam giác cân tại D.

Xét đường tròn tâm D đi qua 3 điểm B, I, C. Đường tròn này cắt ID kéo dài tại K.

Từ tam giác vuông IBQ đồng dạng với tam giác vuông IKC và tam giác vuông IQC đồng dạng với tam giác vuông IBK, dễ dàng suy ra đpcm.

2.26 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2003 (cho mọi thí sinh)

Bài 1. Điều kiện để phương trình có nghĩa: $x \geqslant -2$

[Chú ý rằng: $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$]

Cách 1:

Nhân hai vế của phương trình với ($\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}>0$) ta được phương trình tương đương

$$1+\sqrt{x^2+7x+10}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow\quad (\sqrt{x+5}-1)(\sqrt{x+2}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=1\\ \sqrt{x+2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=-4 & \text{(loại)}\\ x=-1\end{array}\right.$$

Đáp số: $x=-1$

Cách 2:

Đặt ($\sqrt{x+5}=u, \sqrt{x+2}=v \quad \Rightarrow u\geqslant 0, v\geqslant 0, u^2-v^2=3$ và u,v thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-v^2=3\\(u-v)(1+uv)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^2-v^2=3 & (1)\\(u-v)(1+uv)=u^2-v^2 & (2)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (u-v)(1+uv-u-v)=0$$
$$\Leftrightarrow (u-v)(u-1)(v-1)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\u=1\\v=1\end{array}\right.$$

Với $u=1$ tức $\sqrt{x+5}=1\Leftrightarrow x=-4$ (loại).
Với $v=1$ tức $\sqrt{x+2}=1\Leftrightarrow x=-1$
Đáp số: x=-1

Bài 2.

Cách 1:

$$\begin{cases}2x^3+3x^2y=5\\y^3+6xy^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x^3+12x^2y=20\\y^3+6xy^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+y)^3=27\\y^3+6xy^2=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+y=3\\y^3+6xy^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=3-y\\y^3+3(3-y)y^2=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}(3-y) & (1)\\2y^3-9y^2+7=0 & (2)\end{cases}$$

Giải (2) ta được
$y=1\Rightarrow x=1$ và
$y=\frac{7\pm\sqrt{105}}{4}\Rightarrow x=\frac{5\mp\sqrt{105}}{8}$

Cách 2: Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 7 và hai vế của phương trình thứ hai với 5 rồi trừ cho nhau, ta được hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}2x^3+3x^2y=5 & (1)\\14x^3-5y^3+21x^2y-30xy^2=0 & (2)\end{cases}$$

Trong (2) đặt $y = tx$ (Chú ý rằng hệ không có nghiệm với $x = 0$), ta được phương trình:

$$5t^3 + 30t^2 - 21t - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(5t^2 + 35t + 14) = 0$$

Giải ra ta được

$$t = 1 \quad \text{và} \quad t = \frac{-35 \pm 3\sqrt{105}}{1}0 = t_{1,2}$$

Với $t = 1$ tức $y = x$, thay vào (1) ta được nghiệm $x = y = 1$
Với $t = t_1$ tức $y = t_1 x$, thay vào (1) ta được phương trình ($i = \overline{1,2}$)

$$(2 + 3t_i)x^3 = 5 \Leftrightarrow x^3 = \frac{5}{2 + 3t_i} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{5}{2 + 3t_i}} = \sqrt[3]{\frac{50}{-85 \pm 9\sqrt{105}}} = x_i$$

Từ đó suy ra t_i, x_i
Chú ý: Đến khi thu được giá trị $t_{1,2}$ ta có thể viết ngắn gọn

$$x_i = \sqrt[3]{\frac{5}{2 + 3t_i}}, \quad y_i = t_i\sqrt[3]{\frac{5}{2 + 3t_i}}, \quad i = \overline{1,2}$$

hoặc có thể tính toán và rút gọn tiếp tục

Bài 3.

$$\begin{aligned} & 2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \\ \Leftrightarrow\ & 2y^2(x-1) - x(x-1) - y(x-1) + 1 = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Do phương trình không có nghiệm với $x = 1$ nên (1) tương đương với

$$2y^2 - x - y + \frac{1}{x-1} = 0 \qquad (2)$$

Phương trình có nghiệm x, y nguyên

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \quad x - 1 \in \{1, -1\} \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Thay $x = 2$ vào phương trình (2):

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} y = 1 & \\ y = -\frac{1}{2} & \text{loại} \end{array}\right.$$

Thay $x = 0$ vào phương trình (2):

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} y = 1 & \\ y = -\frac{1}{2} & \text{loại} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x, y) = \{(2, 1); (0, 1)\}$

Bài 4.

1) Hạ AA' và BB' vuông góc với MN. Gọi H là trung điểm của MN suy ra $OH \perp MN$.

Trong hình thang $AA'B'B$ ta có:

$$OH = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MH = \frac{R}{2} \Rightarrow MN = R \quad \text{và} \quad \triangle OMN \text{đều.}$$

2) $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{KNI} = 90^0 \Rightarrow M, N, I, K$ cùng nằm trên một đường tròn đường kính IK.

Do $\widehat{ANK} = 90^0, \widehat{KAN} = \widehat{MAN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = 30^0$ nên $\widehat{AKN} = 60^0$.

Gọi trung điểm IK là O'

$$\Rightarrow \widehat{MO'N} = 2\widehat{MON} = 120^0 \Rightarrow MN = MO'\sqrt{3} \Rightarrow MO' = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Vậy bán kính đường tròn qua M, N, I, K là $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

3) Do I là trực tâm $\triangle ABK$ nên $KI \perp AB$ (giả sử tại P).

Do O, O' nằm trên đường trung trực của MN nên O, H, O' thẳng hàng.

$$\triangle MOO' \quad \text{có} \quad \widehat{OMO'} = 90^0 (\widehat{MOO'} = 30^0, \widehat{MO'O} = 60^0)$$
$$\Rightarrow OO' = 2MO' = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$\triangle KAB$ có AB không đổi nên nó có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi KP lớn nhất.

Do $KP \leqslant KO' + OO' = \frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{2R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}R$

Dấu = đạt được khi $P \equiv O \Leftrightarrow \triangle KAB$ cân ở $K \Leftrightarrow \triangle KAB$ đều (vì $\widehat{AKB} = 60^0$) nên diện tích tam giác KAB đạt max bằng $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$ đạt được khi và chỉ khi $\triangle KAB$ đều.

Chú ý: Chúng ta có thể chứng minh tính chất: Trong các tam giác KAB có AB cố định và $\widehat{AKB} = 60^0$, tam giác cân ở K (tức tam giác đều) có diện tích lớn nhất. Từ đó suy ra S_{KAB} đạt max bằng $R^2\sqrt{3}$

Bài 5.

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &\geqslant 2x, & \text{dấu} = \text{đạt} &\quad \Leftrightarrow x = 1\\
y^2 + 1 &\geqslant 2y, & \text{dấu} = \text{đạt} &\quad \Leftrightarrow y = 1\\
z^2 + 1 &\geqslant 2z, & \text{dấu} = \text{đạt} &\quad \Leftrightarrow z = 1\\
2(x^2 + y^2 + z^2) &\geqslant 2(xy + yz + zx), & \text{dấu} = \text{đạt} &\quad \Leftrightarrow x = y = z.
\end{aligned}$$

Cộng lại ta được

$3(x^2+y^2+z^2)+3 \geqslant 2(x+y+z+xy+yz+zx), \quad$ dấu = đạt $\quad \Leftrightarrow x=y=z=1$

.

Mà theo giả thiết thì $x+y+z+xy+yz+zx=6$, đẳng thức này thoả mãn khi $x=y=z=1$ nên ta có

$3(x^2+y^2+z^2)+3 \geqslant 2.6 \quad$ hay $\quad x^2+y^2+z^2 \geqslant 3, \quad$ dấu "=" $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned} & 3(x^2+y^2+z^2)+3 \geqslant (x+y+z)^2 \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant x+y+z \end{aligned}$$

Ngoài ra: $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$. Cộng lại ta được

$$\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2 \geqslant 6$$

Đặt $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=t$ ta được $t \geqslant 0$ và $t^2+\sqrt{3}t \geqslant 6 \Leftrightarrow (t+2\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) \geqslant 0$

$$\begin{aligned} & t^2+\sqrt{3}t \geqslant 6 \Leftrightarrow (t+2\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \geqslant 3 \end{aligned}$$

2.27 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2003 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

$$x^4+2mx^2+4=0 \tag{1}$$

Đặt $x^2=t$ ta được phương trình

$$t^2+2mt+4=0 \tag{2}$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghệm dương

$$t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle' = m^2-4>0 \\ t_1+t_2=-2m>0 \\ t_1.t_2=4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2$$

Khi đó (1) có 4 nghiệm là $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}; x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$ và

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1^2 + t_2^2) = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = 8m^2 - 16$$

Do đó $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32 \Leftrightarrow 8m^2 - 16 = 32 \Leftrightarrow m^2 = 6 \Leftrightarrow m = -\sqrt{6}$ (vì $m < -2$)

Vậy: $m = -\sqrt{6}$

Bài 2.

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Cách 1:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x + 1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 4(-2x^2 + 5x - 2)}}{2} = \left[\begin{array}{l} 2x - 1 \\ -x + 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{13}{5} \\ x = y = 1 \end{array} \right.$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y + (x-2)(1-2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y + x - 2)(y - 2x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Vậy hệ tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{13}{5} \end{array} \right.$$

Bài 3.

Cách 1: Ta tìm nghiệm thoả mãn $|x| \leqslant |y|$

Khi đó

$$xy \leqslant |xy| \leqslant y^2 \quad \text{và} \quad x^2y^2 = x^2xy + y^2 \leqslant 3y^2 \tag{1}$$

Dễ thấy, nếu phương trình có nghiệm với $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại.

Với $y \neq 0$ thì từ phương trình (1) $\Rightarrow x^2 \leqslant 3 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$

Với $x = 1$ thay vào phương trình đã cho ta được $y = -1$, còn

Với $x = -1$ ta được $y = -1$

Do vai trò của x, y trong phương trình đã cho đối xứng nên trường hợp $|x| \geqslant |y|$ ta cũng chỉ thu được ba nghiệm trên.

Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên là:

$$x = 0, y = 0; \quad x = 1, y = -1; \quad x = -1, y = 1$$

Cách 2: Ta chứng minh phương trình không có nghiệm với $|x| \geqslant 2, |y| \geqslant 2$.

Thật vậy, với $|x| \geqslant 2$ và $|y| \geqslant 2$ ta có

$$\begin{cases} x^2y^2 \geqslant 4x^2 \\ x^2y^2 \geqslant 4y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2y^2 \geqslant 2(x^2+y^2) = x^2+y^2+x^2+y^2 \geq$$
$$\geqslant x^2+y^2+2|xy| > x^2+y^2+xy$$

- Trường hợp $x \pm 2$ hoặc $y = \pm 2$ phương trình không có nghiệm nguyên
- Thử với các trường hợp $x = 0, x = 1$ và $x = -1$ ta được ba nghiệm

$$x = 0, y = 0; \quad x = 1, y = -1; \quad x = -1, y = 1$$

Bài 4. 1) Gọi nửa chu vi tam giác ABC là p thì $AM = AN = p$. Theo tính chất của đường tròn nội tiếp dễ thấy rằng $CD = p - AB$.

Ngoài ra, $BP = BM = p - AB$. Vậy $BP = CD$.

Chú ý: Có thể chứng minh như sau: Giả sử P thuộc đoạn BD. Khi đó:

$$FM = FB + BM = BD + BP = 2BP + PD$$

Tương tự

$$EN = EC + CN = CD + CP = 2CD + PD$$

mà: $FM = EN$ nên $BP = CD$.

Trường hợp D thuộc đoạn BP, chứng minh tương tự.

2) $\triangle BMI$ có $\widehat{BMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \widehat{BIM} \Rightarrow BI = BM = BP = CD = CE$

Do hai đoạn BI, CE song song, bằng nhau và ngược chiều nên $BICE$ là hình bình hành.

Tương tự: $\triangle CNK$ có $\widehat{CNK} = \widehat{AMN} = \widehat{CKN} \Rightarrow CK = CN = CP = BD = BF$.

Do hai đoạn CK, BF song song, bằng nhau và ngược chiều nên $BKCF$ là hình bình hành.

3) *Cách 1:* Kẻ đường phân giác góc PBI cắt PO' tại S thì $\triangle BPS = \triangle BIS$

$$\Rightarrow \widehat{BIS} = \widehat{BPS} = 90^0 \quad \text{và} \quad SI = SP \qquad (1)$$

Xét $\triangle BPS$ và $\triangle CDO$, ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{OCD} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{CBI} = \widehat{OBP} \\ BP = CD \\ \widehat{CDO} = \widehat{BPS} = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BPS = \triangle CDO \Rightarrow OD = SP$$

Từ đó suy ra: $\triangle CPS = \triangle BDO$ (chú ý: $CP = BD$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{PCS} = \widehat{DBO} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{BCK} \\ &\Rightarrow SK = SP \quad \text{và} \quad \widehat{SKC} = \widehat{SPC} = 90^0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra, đường tròn tâm S, bán kính SI đi qua I, K, P và tiếp xúc với BI, CK và BC tại I, K, P tương ứng.

Cách 2: Gọi H là trung điểm của BC và S là điểm đối xứng với O qua H. Dễ thấy các cặp điểm sau đây đối xứng với nhau qua H: B và C; P và D; I và E; F và K.

Do đó: $SI = SP = SK$ (vì chúng lần lượt bằng $OE, SK = OS, SP = OD$)

$$\widehat{BIS} = \widehat{CEO} = 90^0, \quad \widehat{BPS} = \widehat{CDO} = 90^0, \quad ,\widehat{CKS} = \widehat{BFO} = 90^0$$

Suy ra đường tròn tâm S bán kính SP đi qua P, I, K và tiếp xúc với BC, BI, CK (lần lượt tại P, I, K).

Chú ý: Chúng ta có thể lý luận như sau:

Gọi giao điểm của BI và CK là T thì $ABTC$ là hình bình hành và trung điểm H của BC là giao điểm của AT và BC. Qua phép đối xứng tâm H tam giác ABC biến thành $\triangle TCB$, các điểm D, E, F biến thành P, I, K tương ứng suy ra đường tròn qua D, E, F biến thành đường tròn đi qua P, I, K.

Do đường tròn qua D, E, F nội tiếp $\triangle ABC$ nên đường tròn qua P, I, K nội tiếp $\triangle TCB$, tức tiếp xúc với BC, BI, CK tại P, I, K tương ứng.

Bài 5. Đặt $y = 3 - x$, bài toán đã cho trở thành:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + 6x^2y^2$, trong đó x, y là các số thực thay đổi và thoả mãn hệ thức:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 \geqslant 5 \end{cases}$$

Từ các hệ thức trên ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 9 \\ x^2 + y^2 \geqslant 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (x^2+y^2) + 4(x^2+y^2+2xy) \geqslant 5 + 4.9 = 41 \\ &\Rightarrow \quad 5(x^2+y^2) + 4(2xy) \geqslant 41 \end{aligned}$$

Ta có

$$16(x^2+y^2)^2 + 25(2xy)^2 \geqslant 40(x^2+y^2)(2xy)$$

Dấu = đạt được $\Leftrightarrow \quad 4(x^2+y^2) = 5(2xy)$

Cộng hai vế bất đẳng thức thu được với $25(x^2+y^2)^2 + 16(2xy)^2$ ta thu được:

$$\begin{aligned} &41[(x^2+y^2)^2 + (2xy)^2] \geqslant [5(x^2+y^2) + 4(2xy)]^2 \geqslant 41 \\ \Leftrightarrow \quad &(x^2+y^2)^2 + (2xy)^2 \geqslant 41 \quad \text{hay} \quad x^4 + y^4 + 6x^2y^2 \geqslant 41^2 \end{aligned}$$

Dấu = đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 4(x^2+y^2) = 5(2xy) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 1 \end{array} \right.$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 41, đạt được khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 2$

2.28 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2004 (cho mọi thí sinh)

Bài 1.

1) *Cách 1:* Phương trình tương đương với

$$(|x+1| - 1)(|x-1| - 1) = 0$$

- Giải $|x+1| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$
- Giải $|x-1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Đáp số: $x = 0$; $x = \pm 2$

Cách 2:

- Xét trường hợp $x \geqslant 1$ ta có $2x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (loại)

- Xét trường hợp $x \leqslant -1$ ta có $-2x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$ (loại)

- Xét trường hợp $-1 < x < 1$ ta có $2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x = 0$

Đáp số: $x = 0$; $x = \pm 2$

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x + 2y + 2)(x - y) = 7 & (1) \\ x^3 + y^3 + x - y = 8 & (2) \end{cases}$$

Từ (1), do $x, y \in \mathbb{Z}$ ta thu được các trường hợp sau:

a) $\begin{cases} x + 2y + 2 = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3y = 6$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ (thoả mãn)

b) $\begin{cases} x + 2y + 2 = -7 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -9 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3y = -10$

$\Rightarrow y = -\dfrac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$(loại)

c) $\begin{cases} x + 2y + 2 = 1 \\ x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -5 \end{cases}$

(loại vì không thoả mãn (2))

d) $\begin{cases} x + 2y + 2 = -1 \\ x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow 3y = -10$

$\Rightarrow y = -\dfrac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Đáp số: $x = 1, y = 2$

Bài 2. Ta có đẳng thức

$$
\begin{aligned}
& a^{102}+b^{102}=(a^{101}+b^{101})(a+b)-ab(a^{100}+b^{100})\\
\Leftrightarrow\ & 1=a+b-ab\\
\Leftrightarrow\ & (a-1)(b-1)=0\\
& \left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow 1+b^{100}=1+b^{101}\Leftrightarrow b=1\\ b=1\Rightarrow 1+a^{100}=1+a^{101}\Leftrightarrow a=1\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Thu được $P=2$.

Bài 3. Gọi H, I, P lần lượt là chân các đường vuông góc, phân giác, trung tuyến hạ từ B.

Vì $3^2+4^2=5^2$ suy ra tam giác vuông tại B và $S=\frac{1}{2}.3.4=6$

Vì $AP=CP\Rightarrow\quad S_{CBP}=\frac{1}{2}S=3(cm)$

Vì $\frac{S_{ABI}}{S_{BCI}}=\frac{AI}{IC}=\frac{3}{4}\Rightarrow\quad 4S_{ABI}=3S_{BCI}$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
& 6=S_{ABI}+S_{BCI}=S_{ABI}=\frac{3}{4}S_{BCI}+S_{BCI}=\frac{7}{4}S_{CBI}\\
\Rightarrow\quad & S_{CBI}=\frac{24}{7}(cm^2)\Rightarrow S_{PBI}=S_{CBI}-S_{CPB}=\frac{24}{7}-3=\frac{3}{7}(cm^2)\\
\Rightarrow\quad & \frac{S_{ABH}}{S}=(\frac{3}{5})^2.6=\frac{54}{25}\\
& S_{HBI}=S_{CBH}-S_{CIB}=(6-\frac{54}{25})-\frac{24}{7}=\frac{72}{175}(cm^2)
\end{aligned}
$$

Đáp số:

$$
\begin{aligned}
S_{ABH}&=\frac{54}{25}(cm^2)\\
S_{HBI}&=\frac{72}{175}(cm^2)\\
S_{IBP}&=\frac{3}{7}(cm^2)\\
S_{PCB}&=3(cm^2)
\end{aligned}
$$

Bài 4. Tứ giác $BMHN$ là tứ giác nội tiếp suy ra

$$\widehat{CHN}=\widehat{CBH}=\widehat{AHQ} \tag{1}$$

Vì $ABCN$ là tứ giác nội tiếp

$$\widehat{CBD}=\widehat{CAD} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CAD}=\widehat{AHQ}\rightarrow AQ=HQ$

Mặt khác
$$HQ = \frac{1}{2}AD \to AQ = QD \tag{3}$$
Tương tự suy ra:
$$CP = DP \tag{4}$$
Từ (3) và (4) suy ra: $QP//AC$

Góc $\widehat{PQN} = \widehat{QHA}$ nên tứ giác $PQMN$ là tứ giác nội tiếp suy ra bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. Ta có
$$\frac{1}{2}\Big(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\Big) \geqslant 2x^2y^2$$
$$\frac{1}{4}(x^{16} + y^{16}) \geqslant x^4y^4$$

Suy ra:
$$\frac{1}{2}\Big(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\Big) + \frac{1}{4}(x^{16} + y^{16}) + \frac{5}{2} \geqslant (1 + 2x^2y^2)^2$$
$$\Rightarrow Q \geq \frac{5}{2} = Q_{\min} \quad (\text{Khi} \quad x^2 = y^2 = 1$$

2.29 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2004 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2 \tag{1}$$
Điều kiện: $x \geq 1$

Cách 1: Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của (1). Với $x > 1$ ta có
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > \sqrt{1+3} + \sqrt{1-1} = 2$$
$$x = 1 \quad \text{là nghiệm duy nhất}$$

Cách 2: Đặt $u = \sqrt{x+3}, \quad v = \sqrt{x-1}$ ta có $u > 0, v \geq 0$ và
$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u^2 - v^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Cách 3: Với điều kiện $x \geq 1$ thì (1) tương đương với
$$2x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 4$$
$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 1 - x \tag{2}$$

Do vế trái không âm còn vế phải không dương ($x \geq 1$) nên (2) suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} = 0 \\ 1-x=0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Bài 2.

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 & (1) \\ (x-y)(x^2-y^2) = 3 & (2) \end{cases}$$

Cách 1. Hệ tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ (x+y)(x-y)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 5(x+y)(x-y)^2 \\ (x+y)(x-y)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 5(x-y)^2 & (3) \\ (x+y)(x-y)^2 = 3 & (4) \end{cases} \quad \text{(chú ý: } x+y \neq 0)$$

(3) $\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y-2x)(2y-x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} y &= 2x \\ x &= 2y \end{aligned}\right.$$

Thay $y = 2x$ vào (4) ta được $3x^3 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$
Thay $x = 2y$ vào (4) ta được $3y^3 = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$
Vậy hệ có hai nghiệm là $x = 1, y = 2$ và $x = 2, y = 1$
Cách 2: Hệ (1), (2) tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(2x^2+2y^2) = 30 & (3) \\ (x+y)(x^2-2xy+y^2) = 3 & (4) \end{cases}$$

Trừ (3) cho (4) ta được hệ tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(2x^2+2y^2) = 30 \\ (x+y)^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2 = 10 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2(3-x)^2 = 10 \\ y = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 1, y = 2 \\ x &= 2, y = 1 \end{aligned}\right.$$

Bài 3.

Cách 1.

$$P = \frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq$$
$$\geq 2\frac{xy}{\sqrt{y-1}\sqrt{x-1}}$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $\frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1}$.

Ta có $\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1).1} \leq \frac{(x-1)+1}{2} = \frac{x}{2}$, dấu "=" đạt được khi $x-1=1$ hay $x=2$. Tương tự $\sqrt{y-1} \leq \frac{y}{2}$, dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $y=2$. Do đó

$$P \geq \frac{2xy}{\frac{x}{2}.\frac{y}{2}} = 8$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1} \\ x=2, y=2 \end{cases} \Rightarrow x=y=2$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 đạt được khi và chỉ khi $x=y=2$

Cách 2. Theo trên ta có

$$P = \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$$

Đặt $x-1=a, y-1=b$ thì $a,b>0$ và $x=a+1, y=b+1$, do đó

$$P = \frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a} \geq \frac{4a}{b}+\frac{4b}{a} = 4\Big(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Big) \geq 8$$

Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8, đạt được khi và chỉ khi $a=b=1$ hay $x=y=2$

Bài 4. 1) Nếu M là tâm O của hình vuông thì hiển nhiên M thoả mãn giả thiết. Ta chứng minh điều ngược lại.

Cách 1: Từ giả thiết ta có $\widehat{MBA} = \widehat{MCB} = \widehat{MDC} = \widehat{MAD}$ do đó $\triangle MAB = \triangle MBC = \triangle MCD = \triangle MDA$ suy ra $MA=MB=MC=MD$ và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMD} = \widehat{DMA} = 90^\circ$ hay M là tâm của hình vuông.

Cách 2: Giả sử $M \neq 0$, khi đó M thuộc một trong bốn miền tam giác MAB, MBC, MCD, MDA. Không mất tổng quát, giả sử M thuộc miền tam giác OAD. Do $M \neq 0$ nên một trong hai góc $\widehat{MAD}, \widehat{MDA}$ bé hơn 45°.

Nếu $\widehat{MAD} < 45^\circ$ thì $\widehat{MAB} > 45^\circ \geq \widehat{MDA}$, trái với giả thiết.

Nếu $\widehat{MDA} < 45^\circ$ thì $\widehat{MAB} \geq 45^\circ > \widehat{MDA}$, trái với giả thiết.

Suy ra nếu $M \neq 0$ thì M không thoả mãn giả thiết bài toán.

2) Do $\triangle ANM$ và $\triangle ABC$ vuông cân nên $\frac{AN}{AO} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ suy ra $\triangle AOB \sim \triangle ANC$ (góc A chung) suy ra $\frac{OB}{CN} = \frac{AO}{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ không đổi.

3) Do (S_2) đi qua tâm O của (S_1) và đi qua điểm C nằm ngoài (S_1) nên (S_2) và (S_1) cắt nhau nên các tiếp tuyên là tiếp tuyến chung ngoài. Giả sử hai tiếp tuyến chung đó là PP' và QQ' ($P', Q' \in (S_1)$). Tia OO' cắt (S_1) tại T. Gọi tâm của (S_2) là O' ta có $O'P//OP'$ (cùng vuông góc với PP') nên

$$\widehat{POP'} = \widehat{OPO'} \tag{1}$$

Do $NO \perp OC$ nên O nằm trên đường tròn (S_2) suy ra $\triangle O'PO$ cân ở O' nên ta có $\widehat{OPO'} = \widehat{POO'} \equiv \widehat{PP'O}$ và từ (1) ta có $\widehat{POP'} = \widehat{POT}$ từ đó ta có $\triangle POP' = \triangle POT$ (c-g-c) suy ra $\widehat{PTO} = \widehat{PP'O} = 90°$. Tương tự ta có $\widehat{QTO} = 90°$ hay P, T, Q thẳng hàng và PQ là tiếp tuyến của (S_1) tại T.

Bài 5. Do $\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên với mọi số nguyên dương n thì $\frac{n}{\sqrt{2}}$ là số vô tỷ.

Ta có

$$x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] < \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] < \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_n \leq 1$$

Vì vậy $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{199}$ chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Suy ra các số khác 0 trong chúng chỉ nhận giá trị 1. Do đó số các số khác 0 bằng

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + \ldots + x_{199} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \cdots + \left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{199}{\sqrt{2}}\right] \\ &= \left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right] = [100\sqrt{2}] \end{aligned}$$

Vì $141 < 100\sqrt{2} < 142$ nên $[100\sqrt{2} = 144$.

Vậy trong hai trăm số $x_0, x_1, \ldots, x_{199}$ đã cho có đúng 141 số khác 0.

Chú ý: Có thể thấy rằng $\frac{n+1}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên giữa hai số $\frac{n}{\sqrt{2}}$ và $\frac{n+1}{\sqrt{2}}$ có không quá một số nguyên, do vậy $0 \leq x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] \leq 1$

2.30 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2005 (cho mọi thí sinh)

Bài 1. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ (x+y)^2 - 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = 3 \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases} \tag{*}$$

$$\text{với} \quad \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

Hệ (*) có nghiệm là

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} & \Rightarrow \quad x = y = 1 \\ \begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases} & \text{hệ này vô nghiệm} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x = y = 1$
Bài 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 11 - x - 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{3-2x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4) + (3 - 2x - 2\sqrt{3-2x} + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3-2x} - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2 = 0 \\ \sqrt{3-2x} - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \end{aligned}$$

Bài 3. Phương trình đã cho có dạng

$$x^2 + 17[y^2 + 2xy + 3(x + y)] = 1740$$

Chú ý rằng với số x nguyên, x có thể có dạng như sau:

$$x = 17k \pm r \quad \text{với} \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Từ đó suy ra x^2 có các dạng tương ứng sau:

$$\begin{aligned} x^2 &= 17k \\ x^2 &= 17k + 1 \\ x^2 &= 17k + 4 \\ x^2 &= 17k + 9 \\ x^2 &= 17k + 16 \\ x^2 &= 17k + 8 \\ x^2 &= 17k + 2 \\ x^2 &= 17k + 15 \\ x^2 &= 17k + 13 \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng vế phải 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Trong khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 4.

1) (Xem hình 1)

Cách 1: Ta có $OM//O'D$ (OM và $O'D$ cùng vuông góc với CD)

$$\Rightarrow \widehat{MOO'} = \widehat{OO'D} < \widehat{IO'D} = \widehat{IO'M} < \widehat{OO'M} \Rightarrow OM > O'M$$

Cách 2: Gọi M' là giao điểm của OA và $O'D$. Ta xét hình bình hành $MOM'O'$. Ký hiệu S là diện tích hình bình hành đó, ta có

$$S = AB.O'M = CD.OM \quad \Rightarrow \quad \frac{OM}{O'M} = \frac{AB}{CD} \tag{1}$$

Vì I thuộc đoạn AB, nên $AB = AI+IB = AI+ID = AI+IC+CD > CD$ hay

$$\frac{AB}{CD} > 1 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

2) (Xem hình 2)

Cách 1 Tứ giác $ACBE$ nội tiếp và $IA = IC$, nên $IB = IE$. Mặt khác ta có $IB = ID$, do đó $IB = ID = IE$ và $\triangle BED$ vuông tại B suy ra

$$BD \perp BE \tag{1}$$

Tứ giác $ADBF$ nội tiếp và $IB = ID$, nên

$$IA = IF \quad \Rightarrow \quad AF//BD \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AF \perp BE$.

Cách 2: Ta có

$$\widehat{FAB} = \widehat{FDB} = \widehat{IDB} = \widehat{IBD} = \widehat{ABD} \Rightarrow AF//BD \tag{1}$$

Vì IO' là phân giác $\widehat{BID}$ và IO là phân giác $\widehat{DIA}$, nên $IO \perp IO'$.

Lại có $AC \perp IO$, do vậy $AC//IO'$. Ta có

$$\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \widehat{BAC} \Rightarrow BE//AC//O'I \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp EB \Rightarrow AF \perp BE$.

Bài 5. Điều kiện đã cho có thể viết lại là

$$xy^2 + x^2\frac{1}{z} + y\frac{1}{z^2} = 3$$

Biểu thức P có dạng

$$P = \frac{1}{\frac{1}{z^4} + x^4 + y^4}$$

Đặt $\frac{1}{z} = t$, ta thu được bài toán sau:

Với $x, y, t > 0$ thoả mãn $xy^2 + yt^2 + tx^2 = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4}$$

Ta có

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + y^4 + 1 \geqslant 4xy^2 \\ y^4 + t^4 + t^4 + 1 \geqslant 4yt^2 \\ t^4 + x^4 + x^4 + 1 \geqslant 4tx^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 3(x^4 + y^4 + t^4) + 3 \geqslant 4(xy^2 + yt^2 + tx^2) = 12 \\ &\Rightarrow \quad x^4 + y^4 + t^4 \geqslant 3 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4} \leqslant \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

2.31 Đáp án tuyển sinh lớp 10 năm 2005 (cho thí sinh chuyên toán và chuyên tin)

Bài 1.

Giải phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$.

điều kiện: $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}$.

Phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} &t^2 + 2t - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} t_1 = -4 \quad \text{loại} \\ t_2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 2 \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4-x^2} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Bài 2. Do $x^3 + y^3 - xy^2 = 1$ nên phương trình thứ hai của hệ có dạng:

$$\begin{aligned} &4x^4 + y^4 = (4x + y)(x^3 + y^3 - xy^2) \\ \Rightarrow \quad &xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0 \end{aligned}$$

a) $x = 0 \Rightarrow \quad y = 1 \Rightarrow \quad$ hệ có nghiệm $(0, 1)$.

b) $y = 0 \Rightarrow \quad x = 1 \Rightarrow \quad$ hệ có nghiệm $(1, 0)$.
c) $3y^2 - 4xy + x^2 = 0 \qquad\qquad (*)$
Với $x \neq 0$ chia cả hai vế của phương trình (*) cho x^2 ta nhận được:

$$3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0$$

Đặt $\left(\frac{y}{x}\right) = t \quad \Rightarrow \quad 3t^2 = 4t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}$
Với $\left(\frac{y}{x}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad x = y = 1$
Với $\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3y \Rightarrow 25y^3 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}$
Vậy hệ có tất cả các nghiệm là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt[3]{25}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \end{cases}$$

Bài 3.
1) Từ $(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2) = 2 \quad \Rightarrow \quad x + y \leq \sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ta lại có: $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1 + 2xy \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x + y \geqslant 1$
Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$ hoặc $y = 0$
2)

$$P = \sqrt{1 + 2x} + \sqrt{1 + 2y}$$
$$P^2 = 2 + 2(x + y) + 2\sqrt{1 + 2(x + y) + 4xy}$$

Do $x + y \leqslant \sqrt{2}$ và $4xy \leqslant 2(x^2 + y^2) = 2$

$$\Rightarrow \quad P^2 \leqslant 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2}$$
$$\Rightarrow \quad P \leqslant \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$$

Vậy $P_{\max} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$
Đạt được khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Mặt khác, do $x + y \geqslant 1$ và $4xy \leqslant 0$
Ta có:

$$P^2 \geqslant 2 + 2 + 2\sqrt{1 + 2 + 0}$$
$$\Rightarrow \quad P \geqslant \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Vậy $P_{\min} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

Đạt được khi $x = 0$ hoặc $y = 0$

Bài 4.

1) Lấy điểm P' khác phía với điểm P đối với đường thẳng Ab sao cho $\triangle BPP'$ vuông cân (vuông tai B) (xem hình 1).

Ta có $\triangle BPC = \triangle BP'A$ (c.g.c)

$\Rightarrow \quad \widehat{BP'A} = 135^0$

Do $\widehat{BP'P} = 45^0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{PP'A} = 90^0$

Theo Pitago: $PA^2 = AP'^2 + P'P^2 = PC^2 + 2PB^2$

2) Trước hết ta chứng minh nhận xét sau (xem hình 2)

Cho hình chữ nhật $ABCD$, I là điểm nằm trong hình chữ nhật. Qua I kẻ các đường thẳng MN, PQ tương ứng song song với AB, AD. Gọi diện tích hình chữ nhật $IPBN$ là S_1, diện tích hình chữ nhật $IQDM$ là S_2.

Khi đó, $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi I thuộc đường cheo AC.

Thật vậy, giả sử I thuộc đường chéo AC, chú ý rằng đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên dễ dàng suy ra $S_1 = S_2$.

Ngược lại, giả sử $S_1 = S_2$ khi đó do

$$\begin{aligned} & S_1 = S_2 \\ \Rightarrow\quad & IN.IP = IM.IQ \\ \Rightarrow\quad & \frac{IN}{IM} = \frac{IQ}{IP} = \frac{NC}{MA} \end{aligned}$$

Suy ra hai tam giác vuông MAI, NIC đồng dạng với nhau $\Rightarrow \quad \widehat{MIA} = \widehat{NIC}$.

Do M, I, N thẳng hàng suy ra A, I, C thẳng hàng.

Bây giờ ta chứng minh bài toán (xem hình 3)

Dễ thấy $NBMQ$ là hình chữ nhật.

Qua P và Q kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông.

Do P thuộc đường chéo AM của hình chữ nhật $ABMR$ nên $S_{BLPK} = S_{PIRS}$.

Do P thuộc đường chéo CN của hình chữ nhật $NBCH$ nên $S_{BLPK} = S_{PTHF}$.

Từ đó suy ra: $S_{PIRS} = S_{PTHF}$.

Do hai hình chữ nhật này có phần chung là hình chữ nhật $PIQF$ nên $S_{FQRS} = S_{QITH}$.

Theo nhận xét đã chứng minh, suy ra Q thuộc đường chéo PD của hình chữ nhật $SPTD$, tức đi qua điểm D.

Bài 5.

1) Các đỉnh của (H) chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 14 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là $\alpha = \frac{360^0}{14}$. Các dây nối hai đỉnh của (H) chắn các

cung nhỏ có số đo là $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 7\alpha$ do vậy độ dài các dây đó chỉ nhận 7 giá trị khác nhau.

Lấy 6 đỉnh của (H) thì số dây nối hai đỉnh trong 6 đỉnh đó là $(6 \times 5) : 2 = 15$. Vì 15 dây này có các độ dài nhận không quá 7 giá trị khác nhau nên phải có ba dây cùng độ dài. Trong ba dây đó luôn có hai dây không chung đầu mút (vì nếu hai dây bất kỳ trong ba dây đó đều chung đầu mút thì ba dây bằng nhau đó tạo thành một tam giác đều, do đó số đỉnh của (H) chia hết cho 3, trái với giả thiết). Dễ thấy hai dây bằng nhau của một đường tròn không chung đầu mút thì 4 đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình thang (cân). Từ đó suy ra trong 6 đỉnh bất kỳ của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

2) Phân tích 13860 thành nhân tử nguyên tố ta được $13860 = 2.2.3.3.5.7.11$ vì $m.n = 13860$ nên m phải là ước số của 13860 tức là tích của một số nhân tử trong 7 nhân tử trên, còn n là tích của các nhân tử còn lại.

Nếu m có chứa nhân tử 2 (hoặc 3) thì nó phải chứa 2^2 (hoặc 3^2) vì ngược lại thì $\frac{m}{n}$ không tối giản.

Do đó nếu ta ký hiệu $a_1 = 2^2, a_2 = 3^2, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$ thì m là tích của một số nhân tử trong số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, còn n là tích các nhân tử còn lại.

Vì vậy, chỉ có các trường hợp sau:

1. Có 1 phân số có tử số là 1 (mẫu số là 13860).
2. Có 5 phân số có tử số là 1 trong 5 nhân tử a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
3. Có 10 phân số có tử số là tích của hai nhân tử trong số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
4. Có 10 phân số có tử số là tích của ba nhân tử trong số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (mẫu là tích của hai nhân tử).
5. Có 5 phân số có tử số là tích của 4 nhân tử.
6. Có 1 phân số có tử số là tích của cả 5 nhân tử (tức là số $\frac{13860}{1}$).

Vậy số phân số tối giản $\frac{m}{n}$ thoả mãn $m.n = 13860$ là $1+5+10+10+5+1 = 32$. Các phân số trên được chia thành từng cặp nghịch đảo nhau và khác 1 nên phân số lớn hơn 1 là $\frac{32}{2} = 16$.