Bài tập về lý thuyết chia hết trong Z

Bài 1:
a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n ta có $6 \mid n^3 - n.$
b)Cho n số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng $6 \mid S \Leftrightarrow 6 \mid P$, ở đây
$S = a_1^3 + ... + a_n^3, T = a_1 + ... + a_n.$

Bài 2: Chứng minh rằng nếu a là số nguyên không chia hết cho 5 và không chia hết cho 7 thì $35 \mid (a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1).$

Bài 3: Chứng minh rằng
a) $a + b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}, a - b \mid a^k - b^k (a, b \in Z, a \neq \pm b).$
b) $8 \mid 5^n + 2.3^{n-1} + 1 (n \in Z^+).$

Bài 4: Cho số nguyên n>3 và a,b là các số nguyên sao cho $2^n = 10a + b (0 < b < 9).$ Chứng minh rằng 6|ab.

Bài 5: Chứng minh rằng
a)Không thể có các số nguyên lẻ $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ thoả mãn $a_1^2 + ... + a_{1999}^2 = a_{2000}^2.$
b)Tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

Bài 6: Tìm tất cả các bộ ba các số nguyên lớn hơn 1 thoả mãn : Tích của hai số bất kỳ trong ba số ấy cộng với 1 chia hết cho số còn lại.

Bài 7: Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n + 11 \mid n^2 + 9n - 2.$

Bài 8: Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 1999 và tổng các chữ số của nó bằng 1999.

Bài 9: Chứng minh rằng $91 \mid 5^n (5^n + 1) - 6^n (3^n + 2^n) (n \in Z^+).$

Bài 10: Tìm các số nguyên dương m,n sao cho n|2m+1 và m|2n+1.

Bài 11: Cho 3 số nguyên x,y,z thoả mãn 6|x+y+z. Chứng minh rằng
6|(x+y)(y+z)(z+x)-2xyz.
HD: (x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx).

Bài 12: Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng
$1 + 2 + ... + n \mid 1^5 + 2^5 + ... + n^5.$